

УДК 511

В. Г. САЙКО, доктор техн. наук, професор;

О. В. ДІКАРСЬВ, канд. техн. наук, доцент;

Л. М. ГРИЩЕНКО, здобувач;

В. І. КРАВЧЕНКО, аспірант;

Ю. О. МІЛОВА, аспірантка,

Державний університет телекомунікацій, Київ

## АЛГОРИТМИ СТИСНЕННЯ І ВІДНОВЛЕННЯ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

**Доведено, що залежно від виду цілого додатного числа, що підлягає стисненню, перший етап процедури стиснення може бути здійснено за одним із двох різних алгоритмів — зовнішнім або внутрішнім. Згідно з цим і відновлення стисненого числа, і вибір критеріїв стиснення має відбуватись по-різному. Обґрунтовано умови, необхідні для правильного відновлення початкового числа за його стисненим еквівалентом. Особливості алгоритмів стиснення і відновлення чисел у разі різних критеріїв стиснення розкрито за допомогою низки характерних прикладів.**

**Ключові слова:** натуральний ряд; алгоритм стиснення; ціле число; еквівалент числа; відновлення числа.

### ВСТУП

Кожне ціле додатне число можна подати відповідним йому відрізком натурального ряду чисел — скінченною зростаючою послідовністю натуральних чисел, перший елемент якої дорівнює 1, а останній — даному числу. До складу будь-якого відрізка натурального ряду у відповідному порядку входять непарні, парні числа, а також числа, що діляться на 3, 5, 7 і т. д. Якщо вилучити (виколоти) з такого відрізка всі парні або всі непарні числа, то він буде стиснений удвічі і складатиметься тільки з непарних або тільки з парних чисел. У результаті описаних дій буде виконано *перший етап стиснення* даного відрізка, а отже, початкового числа.

Відрізок натурального ряду, утворений на першому етапі стиснення, запишемо у вигляді нового аналогічного відрізка і знову вилучимо з нього всі парні або всі непарні числа, виконавши цим самим *другий етап стиснення*. Тоді початкове число зазнає майже чотириразового стиснення.

Таке поетапне стиснення відрізка натурального ряду з одночасним підрахунком здійснених етапів і залишку — кількості невиколотих елементів — можна виконувати доти, доки залишок не скоротиться до одного чи двох чисел.

Легко довести, що в разі парності (непарності) початкового числа залишок на кожному етапі стиснення буде парний (непарний) [1]. Це неодмінно слід враховувати при відновленні числа за його стисненим еквівалентом — остаточним залишком.

При виконанні стиснення формується *двійкова сигнальна послідовність* (далі — ПС), яка після чергового етапу стиснення поповнюється одиницею, якщо залишок є непарне число, або нулем у протилежному випадку. Перший символ у сигнальній послідовності характеризує кратність початкового числа. Наприкінці стиснення сигнальна послідовність міститиме стільки двійкових символів, скільки відбулося етапів стиснення.

Для підвищення загальної ефективності стиснення будемо на кожному етапі вилучати не тільки парні або непарні елементи відрізка, а й такі, що діляться, наприклад, на 3 і 5. Тоді при стисненні числа 57 достатньо трьох етапів, залишок на кожному з яких становить відповідно 19, 7 і 3. Натомість у першому випадку при виколуванні на кожному етапі тільки парних елементів маємо: 57, 29, 15, 8, 4 і 2. Відповідно ПС1 = 111000, а ПС2 = 1111. Переваги другого варіанта вибору критеріїв стиснення очевидні.

Зауважимо, проте, що не менш важливе завдання — знайти спосіб раціонального відновлення початкового числа. Розв'язанню цієї проблеми й присвячено пропонувану статтю.

### ОСНОВНА ЧАСТИНА

#### Глосарій

• **Початкове ціле число** — натуральне число  $N$ , яке зазнає стиснення за допомогою вилучення (виколування) із супровідного відрізка натурального ряду елементів заданої кратності, наприклад таких, що діляться на 2, 3, 5 і т. д.

• **Залишок** — кількість елементів, що залишилися в результаті виконання чергового етапу стиснення.

• **Критерій стиснення** — кратність виколуваних елементів даного відрізка в процесі стиснення початкового числа.

• **Супровідний щодо даного числа  $N$  відрізок натурального ряду** — зростаюча скінченна послідовність натуральних чисел виду  $1, 2, \dots, N$ .

© В. Г. Сайко, О. В. Дікарєв, Л. М. Грищенко, В. І. Кравченко, Ю. О. Мілова, 2017

• **Граничний невиколотий елемент** — найбільший, тобто найближчий до  $N$ , елемент даного відрізка  $z$ -поміж усіх, що залишилися після виколування відповідно до заданих критеріїв стиснення.

• **Зовнішній алгоритм стиснення** — правило, згідно з яким із супровідного відрізка вилучаються ті елементи, що відповідають заданим критеріям стиснення. Тоді залишок складається тільки з таких чисел, які не відповідають жодному критерію стиснення. Надалі називатимемо їх «простими». Початкове число також є «просте».

• **Внутрішній алгоритм стиснення** — правило подання супровідного відрізка в такий спосіб: лівий кінець — це граничний елемент, а правий — початкове число, яке не є простим.

• **Етап стиснення** — реалізація алгоритму виколування елементів заданої кратності — спочатку із супровідного відрізка початкового числа, а далі із супровідних відрізків, що відповідають залишкам, утворюваним унаслідок чергових кроків стиснення.

• **Дуальність першого виду** — алгоритмічна особливість, що дозволяє усунути невизначеність кінцевого результату стиснення.

• **Дуальність другого виду** — алгоритмічна особливість, що унеможливує усунення невизначеності кінцевого результату стиснення.

• **Стиснений еквівалент числа, що зазнало стиснення** — число, що виступає як початкове найменше з чисел, здобутих у результаті стиснення, при відновленні.

**Ефективність стиснення** (за зовнішнім і внутрішнім алгоритмами) — показник, який характеризує економію пам'яті, досягнуту завдяки усуненню процесу формування сигнальної послідовності. Для повного відновлення початкового числа достатньо знати його стиснений еквівалент і кількість етапів стиснення. Нехай, наприклад, стиснений еквівалент не перевищує числа 16. Для його зберігання достатньо чотирьох бітів. Припустимо, що кількість етапів стиснення також дорівнює 16. Сигнальна послідовність у цьому випадку вимагає 16 бітів, а запис у двійковому коді шістнадцяти етапів стиснення займає всього 4 біти. Отже, досягається чотириразова економія пам'яті.

Економія буде ще більш істотна в разі великої кількості етапів. Справді, коли етапів 32, достатньо всього 5 бітів, а коли етапів 64, знадобиться 6 бітів пам'яті.

### Теорема

Ціле додатне число, здобуте в результаті стиснення супровідного відрізка натурального ряду за допомогою як зовнішнього, так і внутрішнього алгоритму, можна відновити в початковому вигляді за відомим стисненим його еквівалентом, кількістю етапів стиснення та використаним зовнішнім або внутрішнім алгоритмом з урахуванням особливостей стисненого числа.

**Д о в е д е н н я.** Усі цілі додатні числа можна поділити на ті, що задовольняють вибрані критерії стиснення, і ті, що не задовольняють їх. Для різних чисел обидва алгоритми на першому етапі можуть давати однаковий результат із появою дуальності першого виду. Проте, скориставшись відповідною ознакою початкового числа, що зазнає стиснення, цю дуальність легко усунути.

### Зовнішній алгоритм стиснення

Припустимо, що стиснення початкового числа 16 полягає у вилученні (виколуванні) із супровідного відрізка елементів, кратних 2, 3 і 5. На кожному етапі стиснення залишаються «прості» числа.

Отже, маємо:

$16 = > (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)$ .

Унаслідок виконання процедури стиснення залишається набір «простих» чисел (1 7 11 13), якого бракує для відновлення початкового числа, бо тут немає чисел 14, 15 і 16. Невідомо, яке з чисел — 13, 14, 15 чи 16 — було початковим.

Вочевидь, якщо початкове число «просте», то на першому етапі стиснення залишок складається з самих лише «простих» чисел, більших від одиниці і менших від  $N$ , що не діляться на 2, 3 і 5.

Іншими словами, *зовнішній алгоритм стиснення застосовується для чисел, що не відповідають вибраним критеріям стиснення, тобто не діляться на 2, 3 і 5.*

### Внутрішній алгоритм стиснення

Для початкового числа, що ділиться на 2, 3 або 5, потрібно після останнього «простого» числа (у нашому прикладі числа 13) у разі початкового числа 14 поповнити набір числом 14; у разі початкового числа 15 поповнити набір числами 14, 15, а в разі початкового числа 16 після «простого» числа 13 включити в набір числа 14, 15 і 16.

Далі йде «просте» число 17, що перевищує початкове число 16, яке підлягає стисненню. За цих умов «просте» число 13 є граничним. Після нього йдуть елементи, що додаються до невиколотих «простих» елементів від останнього з них до початкового числа, що зазнає стиснення, включно.

Іншими словами, внутрішній алгоритм використовується для стиснення початкових чисел, які відповідають одному з вибраних критеріїв. При цьому стиснена множина «простих» елементів супроводного відрізка поповнюється числовою послідовністю від граничного «простого» елемента до числа, що зазнає стиснення на цьому етапі.

Проілюструємо на конкретних прикладах особливості зовнішнього і внутрішнього алгоритмів стиснення. Порядок відновлення початкового числа в цих випадках очевидний.

Нехай, скажімо, критерієм стиснення є виключення елементів даного відрізка, кратних 2, 3 і 5 (табл. 1–5). Зокрема, порядок стиснення «простих» чисел 41 і 53 наведено в табл. 1 і 2. В обох випадках перший етап стиснення включає в себе тільки набори «простих» чисел.

Порядок стиснення за внутрішнім алгоритмом не «простих» чисел 42, 50 і 51 подано відповідно в табл. 3, 4, і 5. Результати стиснення «простого» числа 53 і не «простого» числа 50 абсолютно однакові. Щоб розрізнити такі випадки, доводиться використовувати додаткову характеристичну ознаку.

Таблиця 1

Стиснення числа 41

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41	11	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	3	1 7 11

Таблиця 2

Стиснення числа 53

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53	15	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	6	1 7 11 13 14 15

Таблиця 3

Стиснення числа 42

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42	12	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 42
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	4	1 7 11 12

Таблиця 4

Стиснення числа 50

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50	15	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 50
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	6	1 7 11 13 14 15

Таблиця 5

Стиснення числа 51

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51	16	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 50 51
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	7	1 7 11 13 14 15 16
1 2 3 4 5 6 7	2	1 7

Приклади стиснення і відновлення «простих» і не «простих» чисел за критерієм виключення чисел, кратних 2 і 3, з урахуванням дуальності першого виду, що виникає при цьому, наведено в табл. 6 і 7. При стисненні не «простого» числа 39 і «простого» числа 43 отримуємо абсолютно однакові алгоритми стиснення. Це дає підстави стверджувати, що існує певна закономірність, притаманна стисненню і відновленню «простих» і не «простих» чисел у разі використання зовнішнього і внутрішнього алгоритмів.

Тут немає потреби формувати сигнальну послідовність, а достатньо знати тільки тип застосованого алгоритму, вид початкового числа («просте» чи не «просте»), стиснений його еквівалент і кількість етапів стиснення.

Стиснення числа 39

Таблиця 6

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39	15	1 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 38 39
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	6	1 5 7 11 13 15
1 2 3 4 5 6	3	1 5 6 дуальність

Стиснення числа 43

Таблиця 7

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43	15	1 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	6	1 5 7 11 13 15
1 2 3 4 5 6	3	1 5 6 дуальність

**Вибір альтернативних граничних елементів, що задовольняють вибраний критерій.**

**Дуальність другого виду**

Роль граничного елемента очевидна: він є ознакою відокремлення стисненої частини даного відрізка від нестисненої його частини. Наступний елемент цього відрізка більший від початкового числа на даному етапі.

Природно припустити, що й будь-які інші елементи з відповідними властивостями формально можуть бути граничними елементами. Важливо тільки не сплутати їх з іншими елементами, що не мають потрібних властивостей. Для перевірки такого припущення виберемо граничні елементи, кратні 5, для алгоритму стиснення за критеріями виколювання елементів, кратних числам 2, 3 і 5. Подвійна кратність граничного елемента цілком припустима. Так, число 50, одночасно кратне числам 2 і 5, згідно з цим принципом може бути граничним числом.

На конкретних прикладах перевіримо правильність цього твердження. Справді, розгляд процедур стиснення і відновлення одинадцяти послідовних чисел від 43 до 53 показав: за згаданим принципом і критеріями вилучення елементів із «простого» і не «простого» чисел, як і раніше, отримано однакові алгоритми (табл. 8 і 9). Але зовсім однакові алгоритми отримано і для чисел, наведених у табл. 10 і 11, коли маємо дуальність другого виду, яка не підлягає усуненню. Порядок відновлення зазначених стиснених чисел ілюструють табл. 12–15.

Зауважимо, що для уникнення дуальності другого виду еквівалент початкового числа, що підлягає відновленню, слід подавати в природному, а не в стисненому вигляді (або в стисненому вигляді, що включає в себе не менш ніж два «прості» числа. Отримувач інформації про це повинен знати. Через наявність дуальності другого виду не «простий» елемент відрізка натурального ряду не може бути граничним.

Стиснення числа 44

Таблиця 8

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44	13	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 44
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13	4	1 7 11 13

Стиснення числа 47

Таблиця 9

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47	13	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13	4	1 7 11 13

Таблиця 10

## Стиснення числа 33

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33	11	1 7 11 13 17 19 23 29 31 32 33
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	4	1 7 10 11

Таблиця 11

## Стиснення числа 38

Відрізок натурального ряду	Залишок	Результат стиснення
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38	11	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 38
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11	4	1 7 10 11

Таблиця 12

## Відновлення числа 44

Результат стиснення	Залишок	Відрізок натурального ряду
1 7 11 13	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 44	13	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 39 40 41 42 43 44

Таблиця 13

## Відновлення числа 47

Результат стиснення	Залишок	Відрізок натурального ряду
1 7 11 13	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47	13	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47

Таблиця 14

## Відновлення числа 33

Результат стиснення	Залишок	Відрізок натурального ряду
1 7 10 11	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 7 11 13 17 19 23 29 31 32 33	11	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33

Таблиця 15

## Відновлення числа 38

Результат стиснення	Залишок	Відрізок натурального ряду
1 7 10 11	4	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 38	11	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10, 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 37 38

## ВИСНОВКИ

1. При стисненні і відновленні натуральних чисел одночасно працюють два неперетинні алгоритми, які постійно взаємодіють, по черзі змінюючи один одного.

2. Вибір зовнішнього або внутрішнього алгоритму стиснення початкового числа залежить від того, чи відповідає воно вибраним критеріям кратності.

3. Послідовність елементів стисненого еквівалента, необхідного для відновлення початкового числа, має містити принаймні два «прості» числа.

4. Для розрізнення зазначених алгоритмів на першому етапі стиснення використовується ознака виду числа — «просте» воно чи не «просте».

5. Для застосування зовнішнього алгоритму на першому етапі стиснення початкове число має бути «просте».

6. Починаючи з другого етапу стиснення, вибір алгоритму залежить від залишку попереднього етапу стиснення.

7. Не «простий» елемент відрізка натурального ряду не може бути граничним.

#### Список використаної літератури

1. Галочкин, А. И. Введение в теорию чисел / А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский.— М.: Изд-во МГУ, 1995 г.

2. Нестеренко, Ю. В. Теория чисел / Ю. В. Нестеренко.— М.: Издат. центр «Академия», 2008.

**Рецензент:** доктор техн. наук, професор **Б. Ю. Жураковський**, Державний університет телекомунікацій, Київ.

*V. G. Sayko, A. V. Dikarev, L. N. Grishchenko, V. I. Kravchenko, Y. O. Milova*

#### АЛГОРИТМЫ СЖАТИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Доказано, что в зависимости от вида целого положительного числа, подлежащего сжатию, первый этап процедуры сжатия может быть осуществлен по одному из двух различных алгоритмов — внешнему или внутреннему. В связи с этим и восстановление сжатого числа должно происходить по-разному. Обоснованы условия, необходимые для правильного восстановления начального числа по его сжатому эквиваленту. Особенности алгоритмов сжатия и восстановления чисел при различных критериях сжатия раскрыты при помощи ряда характерных примеров.

**Ключевые слова:** натуральный ряд; алгоритм сжатия; целое число; эквивалент числа; восстановление числа.

*V. G. Sayko, O. V. Dikarev, L. M. Grishchenko, V. I. Kravchenko, Y. O. Milova*

#### ALGORITHMS OF COMPRESSION AND RECOVERY OF INTEGERS NUMBERS

It is proved that depending on the kind of number to be compressed, the initial stage of its compression can be carried out by two different algorithms — external or internal. In accordance with this, the recovery of the compressed number is also carried out in different ways. The necessary conditions for the correct establishment of an integer by its compressed equivalent are justified. The examples describe algorithms for compressing and restoring digits according to different compression criteria.

**Keywords:** natural series; compression algorithm; integer number; number equivalent; recovery of number.

---

## ЗВ'ЯЗОК

*Наукове видання*

Редакційна обробка та коректура

*О. П. Бондаренко, Т. В. Ількевич*

Комп'ютерна верстка та дизайн

*Г. С. Тимченко*

Відповідальний за випуск

*І. І. Тищенко*

Підписано до друку 22.05.2017 р.  
Формат 60×84/8. Папір друкарський.  
Гарнітура SchoolBookC, EuropeCond. Зам. 328  
Наклад 300 прим.

Державний університет телекомунікацій

03110, м. Київ, вул. Солом'янська, 7

Тел. (044) 249-25-75

E-mail: [zviaz-ok@ukr.net](mailto:zviaz-ok@ukr.net)