УДК 621.39.004.15
Л. О. КОМАРОВА, канд. фіз.-мат. наук, професор;
О. А. КІЛЬМЕНІНОВ, здобувач, Державний університет телекомунікацій, Київ

НАДІЙНІСТЬ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ В ІНФОРМАЦІЙНОМУ АСПЕКТІ

На базі понятійного апарату теорії складних систем, теорії інформації та теорії масового обслуговування побудовано математичні моделі, які дають змогу інтерпретувати дослідження динаміки та кількісне оцінювання надійності складної системи як розв'язування економіко-математичної задачі щодо оптимального, унаочнюваного класичною логістичною кривою, розподілу ресурсів на різних етапах життєвого циклу системи.

Ключові слова: функціональна сталість системи; стан здатності елемента; стан відмови елемента; етап створення системи; етап застосування системи за призначенням; етап вичерпання ресурсу; надійність складної системи; ентропія системи.

Вступ

Загалом поняття «система» означає сукупність елементів, котрі перебувають у деяких відношеннях і зв'язках між собою, утворюючи певне об'єднання, що характеризується:

- ♦ *цілісністю* — появою в сукупності елементів нових якостей, не притаманних кожному з них зокрема;
- ♦ *ієрархічністю* — ті чи інші компоненти системи можуть виступати як деякі окремі системи;
- ♦ *структурністю* — існуванням цілком певних зв'язків між елементами.

Системи, які вирізняються функціональним розмаїттям, конструктивною складністю та складністю покладених завдань, а також високою вартістю відмов і значною автономністю, відносять до класу ***складних систем***, таких, скажімо, як системи телекомунікацій.

Складні системи досліджують, використовуючи ***системний підхід*** — методологічний напрямок у науці, головне завдання якого полягає в розробці методів дослідження та конструювання складно організованих об'єктів і систем різних типів. Саме такий підхід буде застосовано в подальших міркуваннях.

Основна частина

Основу ***функціональної сталості*** складної системи становить її елементна й структурна ***надійність*** — здатність системи (елемента) зберігати свою функцію протягом певного часу в певних умовах застосування під впливом деструктивних чинників — ***відмов*** елементів і структури в цілому як деяких випадкових подій. Отже, у сенсі ***надійності*** система може перебувати в одному з двох протилежних станів — функціональної ***здатності*** і ***відмови***.

Кожний функціональний елемент ***одноканальної*** системи, який перебуває у стані ***здатності***, може бути переведений у стан ***відмови***, що, у свою чергу, означатиме настання випадкової події, яка полягає у втраті ним ***здатності***. Відмова будь-якого елемента системи призводить до втрати своєї функції системою в цілому.

Нехай, наприклад, для n різнорідних функціональних елементів системи відома питома (для кожного елемента) інтенсивність λ_j потоків взаємно незалежних подій — ***відмов у часі***:

$$\Lambda = \left\langle \lambda_j(t),\ j=\overline{1,n} \right\rangle,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \Lambda S. \tag{1}$$

Кожна з цих відмов діє на відповідний елемент, коли він перебуває у ***стані здатності***, переводячи його саме в ***стан відмови***. Тоді ***ймовірність стану здатності*** кожного j-го елемента як функція часу $p_j(t)$ визначається такими міркуваннями: темп зменшення ймовірності стану здатності як від'ємна похідна цієї ймовірності за часом $(-dp_j/dt)$ визначається добутком інтенсивності потоку відмов $\lambda_j(t)$, що діє на даний елемент у стані здатності, і поточного значення ймовірності набуття стану здатності елементом $p_j(t)$. Відповідний процес подається диференціальним рівнянням виду

$$-\frac{dp_j(t)}{dt} = \lambda_j(t) \cdot p_j(t), \quad j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Типовий графік залежності інтенсивності потоку відмов j-го функціонального елемента протягом часу життєвого циклу системи наведо на рис. 1.

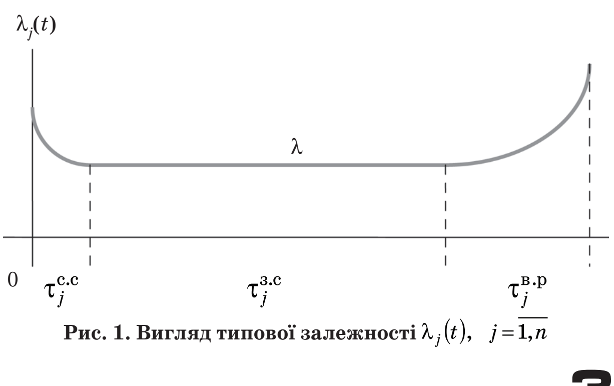

Рис. 1. Вигляд типової залежності $\lambda_j(t)$, $j=\overline{1,n}$

На етапі ***створення системи*** — позначимо його як $\tau_j^{с.с}$ — інтенсивність відмов *j*-го елемента знижується відносно початкового значення завдяки поступовому усуненню недоліків ***створення системи***; на *основному* етапі застосування системи за призначенням — позначимо його $\tau_j^{з.с} = \tau$ — інтенсивність відмов лишається практично постійна; на етапі ***вичерпання ресурсу*** системи — позначимо його $\tau_j^{в.р}$ — інтенсивність відмов значно зростає саме через брак ресурсу. Тому на основному етапі життєвого циклу ***застосування системи*** (за призначенням) вважаємо інтенсивність $\lambda_j(t)$ статистичною константою, тобто $\{\lambda_j(0 \le t \le \tau) \approx \lambda_j\}, \quad j = \overline{1,n}$.

При інтегруванні диференціального рівняння (2) для інтервалу часу застосування $(0 \le t \le \tau)$ вважаємо, що відповідне початкове значення ймовірності $p_j(t=0)=1$, а кінцеве її значення $p_j(t=\tau) = p_j(\tau)$. Після відокремлення в диференціальному рівнянні (2) змінних — ***імовірності*** *p* і ***часу*** *t*, а також їхніх диференціалів переходимо в лівій і правій частинах цього рівняння до однорідних підінтегральних функцій, інтегрування яких і визначає функціональну залежність імовірності набуття ***стану здатності*** від часу застосування (та відповідної до неї ймовірності ***стану відмови***):

$$\begin{gathered} \frac{dp_j}{p_j} \approx -\lambda_j \cdot dt; \\ \int\limits_{p_j(t=0)}^{p_j(t=\tau)} \frac{dp_j}{p_j} = -\int\limits_0^{\tau} \lambda_j \cdot dt; \\ \ln\{p_j(\tau)\} - \ln\{1\} = -\lambda_j \tau; \\ p_j(\tau) = \exp(-\lambda_j \tau),\ q(\tau) = 1 - p(\tau),\ j = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{3}$$

Оскільки з погляду забезпечення загальносистемної функції функціональні елементи системи ***рівноцінні***, то ймовірність складної події, що полягає у збереженні системної функції, подається згідно з теорією ймовірностей та алгеброю подій як добуток імовірностей перебування у ***стані здатності*** всіх *n* функціональних елементів системи протягом часу *TS* її застосування:

$$PS(n) = \prod_{j=1}^{n} p_j(TS) = \prod_{j=1}^{n} \exp(-\lambda_j \cdot TS) = \\ = \exp\left\{-TS\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right\} = \exp(-\Lambda S \cdot TS) = 1 - QS(n). \tag{4}$$

Надійність складної системи оцінюється одним із показників — ***імовірністю*** стану ***здатності***. Проте ***ймовірність*** не є синонімом ***надійності***. Надійність системи краще сприймається як її ***властивість***, що має не експоненціальну, а рівномірну шкалу її кількісної міри. Окрім того, складна система $S(n)$, яка може перебувати в стані здатності чи в стані відмови з певною апріорною ймовірністю (4), у сенсі надійності є суто інформаційним об'єктом через свою ентропійну природу. Адже визначення фактичного стану (здатності чи відмови) пов'язане зі здобуттям інформації, кількість якої $IS(n)$ ***обернена*** до ентропії (міри невизначеності стану) системи $HS(n)$, тобто усуває її:

$$HS(n) = -PS(n) \cdot \log_2 PS(n) - QS(n) \cdot \log_2 QS(n) = IS(n). \tag{5}$$

Значення ентропії системи для окремих значень апріорної ймовірності її станів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

PS	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	**0,5**	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
QS	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	**0,5**	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
HS	0,0	0,4690	0,7720	0,8813	0,9709	**1,0**	0,9709	0,8813	0,7720	0,4690	0,0

Очевидно, ентропія системи максимальна (1,0) у разі однакової ймовірності обох можливих станів ($PS = QS = 0.5$). Надійність системи з ***максимальною ентропією***, для якої ймовірність станів однакова, можна взяти за одиницю при оцінюванні надійності інших систем. При цьому кількість оберненої до ентропії (такої, що дорівнює «усуненій ентропії») інформації про фактичний стан даної системи становить 1 «бал» (еквівалент одного біта).

Таким чином, надійність системи доцільно вимірювати ***кількістю*** інформації (згідно з Хартлі–Шенноном) про ***умовну відмову*** системи (за апріорної ймовірності даного стану *QS*), тобто таким ***інформаційним показником надійності***, вимірюваним у балах:

$$RS = -\log_2 QS. \tag{6}$$

Зауважимо, що наведені в табл. 2 значення інформаційного показника надійності *RS* засвідчують про його адекватність фізичному змісту даної властивості системи — надійність *RS* системи зростає на 1 бал, якщо ймовірність стану відмови *QS* зменшується вдвічі (нібито на додаток до існуючої виникає аналогічна система з даною функцією).

Таблиця 2

QS	**(1)**	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
RS	**(0)**	1	2	3	4	5

Справді, для апріорної ймовірності стану відмови $QS = 1/32 = 0{,}03125$ (відповідна ймовірність стану здатності $PS = 1 - QS = 0{,}96875$), коли система може вважатися практично ***безвідмовною***, інформаційний показник надійності дорівнює 5 балів (що відповідає кількості одиниць інформації про «умовну відмову» — 5 біт).

Порівняємо, наприклад, дві системи за ***ймовірнісним*** та ***інформаційним*** показниками надійності. Нехай відомі такі значення згаданих показників для розглядуваних систем:

$$P_1 = 0{,}85(Q_1 = 0{,}15),\, R_1 = -\log_2(0{,}15) = 2{,}737;$$
$$P_2 = 0{,}95(Q_2 = 0{,}05),\, R_2 = -\log_2(0{,}05) = 4{,}322.$$

Як бачимо, за ***ймовірнісним*** показником друга система щодо надійності істотно переважає першу:

$$P_2/P_1 = 0{,}95/0{,}85 = 1{,}118 \,(\text{разів, або на } 11{,}8\%).$$

Проте за ***інформаційним*** показником перевага значно більша:

$$R_2/R_1 = 4{,}322/2{,}737 = 1{,}579 \,(\text{разів, або на } 57{,}9\%),$$

що цілком адекватно надає кількісну міру властивості ***надійність***.

За наявної надійності системи, яку вже не можна підвищити, подальше зростання надійності системи досягається її поелементним (поканальним) ***резервуванням***, тобто введенням структурної ***надлишковості*** наявних функціональних елементів (каналів).

Нехай при резервуванні елементів (каналів) система має m аналогічних елементів (каналів) з імовірністю P_i безвідмовного стану кожного елемента (каналу):

$$\langle p_i = (1 - q_i),\, i = 1, m \rangle. \tag{7}$$

Імовірність безвідмовного стану всієї системи набирає вигляду

$$PS(m) = 1 - \prod_{i=1}^{m} q_i = 1 - QS(m). \tag{8}$$

Скориставшись виразом (6), знайдемо значення $RS(m)$ інформаційного показника надійності для системи з резервуванням. Із (8) випливає, що

$$QS(m) = \prod_{i=1}^{m} q_i, \tag{9}$$

а тому інформаційний показник надійності системи

$$PS(m) = -\log_2 QS(m) = -\log_2\left(\prod_{i=1}^{m} q_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\{-\log_2(q_i)\} = \sum_{i=1}^{m} r_i, \tag{10}$$

тобто дорівнює сумі частинних показників надійності всіх її елементів (каналів).

Якщо всі канали за надійністю однакові, тобто $\langle (r_i = r),\, i = \overline{1, m} \rangle$, то , вочевидь,

$$RS(m) = \sum_{i=1}^{m} r = mr. \tag{11}$$

Розглянемо приклад оцінювання надійності системи з резервуванням за допомогою ймовірнісного та інформаційного показників. Припустимо, що одноканальна система має такі характеристики:

$$PS(1) = P(1) = 0{,}7,$$
$$Q(1) = 1 - P(1) = 0{,}3,$$
$$RS(1) = R(1) = -\log_2(0{,}3) = 1{,}737.$$

У разі кратності резервування $m = 2$ (*дублювання каналу системи цілком ідентичним каналом*) дістаємо:

$$PS(m) = 1 - Q(1)^m = 1 - 0{,}3^2 = 0{,}91,$$
$$QS(m) = Q(1)^m = 0{,}3^2 = 0{,}09,$$
$$RS(m) = -\log_2(0{,}09) = 3{,}474.$$

Отже, надійність системи з резервуванням порівняно з одноканальною за ймовірнісним показником зростає на 30%:

$$PS(2)/PS(1) = 0{,}91/0{,}7 = 1{,}3 \text{ раза},$$

тоді як за інформаційним показником вона подвоюється, тобто зростає на 100%:

$$RS(2)/RS(1) = 3{,}474/1{,}737 = 2 \text{ рази},$$

що цілком відповідає дублюванню каналів системи, підтверджуючи коректність оцінки надійності системи з резервуванням саме інформаційним показником згідно з (9), (10).

Справді,

$$RS(m) = mRS(1) = 2 \cdot 1{,}737 = 3{,}474.$$

Для підвищення функціональної стійкості інформаційних систем (скажімо, АСУ військами та зброєю) застосовується їх ***мажоритарне резервування***. Розглянемо його особливості.

Проаналізуємо (маючи на меті порівняння з одноканальною) систему, що складається з трьох паралельних функціональних каналів, для яких мажоритарний принцип вибору функціоналу системи полягає у збігу вихідної функції в будь-яких двох («2/3») або в усіх трьох («3/3») каналів.

Якщо канали системи однакові стосовно ймовірності їхньої безвідмовної роботи (ІБР), тобто коли $p_1 = p_2 = p_3 = p$, а ймовірність безвідмовної роботи мажоритарного елемента дорівнює $p^{м}$, то ІБР системи, згідно з теорією ймовірностей та алгеброю подій, визначається так:

$$PS(«2/3», «3/3») =$$
$$= \{p_1 p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3\}p^{м} =$$
$$= \{3p^2(1-p) + p^3\}p^{м} = PS(3^{м.р}), \tag{12}$$

де скорочення «м.р» означає ***мажоритарне резервування***.

Графік залежності ІБР системи від p — рівня ІБР «робочих» каналів, для різних значень $p^м$ наведено на рис. 2.

Штрихпунктиром зображено графік функції $PS(3^{м.р})$ при $p^м = 1$ (вираз у фігурних дужках формули (1)). Легко побачити, що в даному разі мажоритарне резервування доцільне лише при ІБР робочих каналів $p > 0,5$, тобто коли графік кривої $PS(3^{м.р})$ проходить над прямою $PS(1) = p$ нерезервованої системи. Оскільки завжди реальна ІБР мажоритарного елемента $p^м < 1$, то з тих самих міркувань мажоритарне резервування матиме сенс лише в діапазоні значень ІБР робочих каналів

$$p^н < p < p^в. \qquad (13)$$

Зрозуміло, що ***нижнє*** та ***верхнє*** значення ІБР робочих каналів являють собою корені алгебраїчного рівняння, що відображає точки перетину жирної кривої $PS(3)$ та прямої $PS(1) = p$ (нерезервована одноканальна система) — див. рис. 2:

$$\left\{3p^2(1-p)+p^3\right\}\cdot p^м = p. \qquad (14)$$

Отже, розв'язки даного рівняння такі:

$$p^н = \frac{3p^м - \sqrt{9\left(p^м\right)^2 - 8p^м}}{4p^м};\; p^в = \frac{3p^м + \sqrt{9\left(p^м\right)^2 - 8p^м}}{4p^м}. \qquad (15)$$

Як випливає з рис. 2, існує таке (оптимальне) значення ІБР робочого канала, при якому ***виграш*** мажоритарного резервування (перевищення ІБР системи порівняно з ІБР елемента, що позначено стрілкою) максимальний; знайдемо його з очевидного рівняння

$$P\{«2/3», «3/3»\} - p = \left\{3p^2(1-p)+p^3\right\}\cdot p^м - p = \Delta. \qquad (16)$$

Необхідна умова максимуму різниці Δ — це рівність нулю її похідної за змінною p:

$$\frac{d\Delta}{dp} = -\left(6p^м\right)p^2 + \left(6p^м\right)p - 1 = 0. \qquad (17)$$

Розв'язком даного алгебраїчного рівняння і є ***оптимальне*** значення ІБР робочого каналу для завданого значення ІБР мажоритарного елемента:

$$p^о = \frac{-6p^м - \sqrt{36\left(p^м\right)^2 + 24p^м}}{-12p^м}. \qquad (18)$$

Існує також мінімальне значення для ІБР мажоритарного елемента, коли мажоритарне резервування системи ще має сенс; воно, як випливає з графіка, наведеного на рис. 2, подається очевидною умовою, коли ***верхнє*** і ***нижнє*** значення інтервалу (15) рівні між собою, тобто збігаються в ***точку дотику*** кривої при мажоритарному «потроєнні» системи $PS(3^м)$ до прямої $PS(1) = p$ нерезервованої системи. Із (4) випливає, що при цьому

$$p^н = p^в \qquad (19)$$

за умови рівності нулю виразу під коренем для даних ІБР:

$$9\left(p^м\right)^2 - 8p^м = 0. \qquad (20)$$

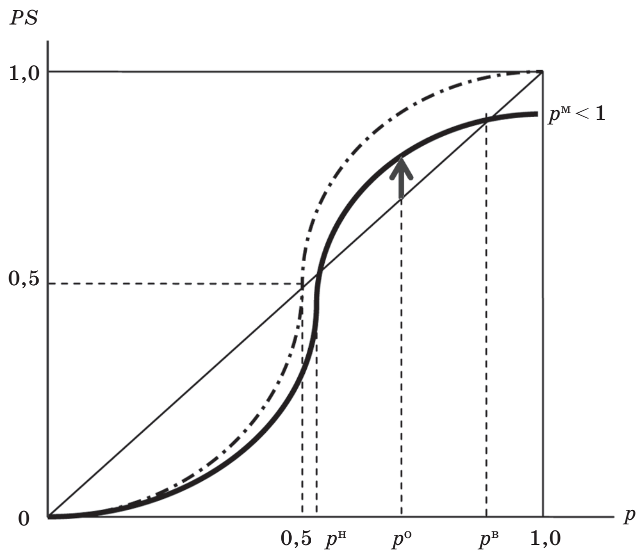

Рис. 2. «Мажоритарне» резервування за принципом «2/3», «3/3» ($p^н$, $p^о$, $p^в$ — відповідно *нижнє*, *оптимальне* та *верхнє* значення ймовірності p)

Остаточно мінімальне припустиме значення ІБР (чи надійність) мажоритарного елемента, при якому ще можливе мажоритарне резервування «потроєнням» каналів, визначається так:

$$p^м = 8/9 = 0,888... = 0,(8),$$
$$r^м = -\log_2 q^м = 3,170. \qquad (21)$$

Розглянемо чисельний приклад. Нехай для одноканальної системи відомо

$PS(1) = 0,7$ ($QS = 0,3$); $RS(1) = -\log_2 QS = 1,737$.

У разі мажоритарного «потроєння» системи, для якої

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0,7 \quad (q = 1 - p = 0,3);$$
$$r(1) = -\log_2 q = 1,737\,(\text{балів}),$$

а ІБР мажоритарного елемента («практично безвідмовного»)

$$p^м = 0,96875; \; r^м = 5\,(\text{балів}),$$

маємо:

$$PS\left(3^м\right) = \left(3\cdot 0,7^2\cdot 0,3 + 0,7^3\right)0,96875 = 0,7595,$$
$$QS\left(3^м\right) = 1 - PS\left(3^м\right) = 0,2405;$$
$$RS\left(3^м\right) = -\log_2 QS\left(3^м\right) = 2,056\,(\text{балів}).$$

Зрештою кратність зростання надійності системи:

♦ за *ймовірнісним* показником

$$PS\left(3^{\text{м}}\right)/PS(1)=0{,}7595/0{,}7=1{,}085\,(\text{на }8{,}5\%);$$

♦ за *інформаційним* показником

$$RS\left(3^{\text{м}}\right)/RS(1)=2{,}056/1{,}737=1{,}184\,(\text{на }18{,}4\%).$$

Пряма пропорційна залежність рівня надійності системи від кратності її поканального резервування

$$RS(m)\approx R(1)m \qquad (22)$$

може бути узагальнена як ***лінійна*** залежність надійності від витрат на її забезпечення:

$$RS(X)=R(1)\{1+X/C(1)\}, \qquad (23)$$

де $C(1)$ — вартість системи з нормативним рівнем надійності $R(1)$; X — витрати на підвищення надійності до рівня $RS(X)$.

Це кардинально змінює формальну постановку задачі мінімізації витрат на забезпечення потрібного рівня надійності. Справді, для ймовірнісного показника надійності (саме ІБР за час застосування TS) його залежність від витрат, як випливає з (4), суто нелінійна:

$$PS(X)=\exp\{-\Lambda S(X)\cdot TS\}, \qquad (24)$$

де $X=(x_1+\ldots+x_n)$ — витрати на зменшення інтенсивності відмов елементів системи

$$\Lambda S(X)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(x_j\right). \qquad (25)$$

У такому разі відносне значення показника ІБР (але не надійність) системи зростає в

$$\Delta PS/PS=\{PS(X)-PS\}/PS=$$
$$=\exp\{-\Lambda S(X)\cdot TS+\Lambda S\cdot TS\}-1\,(\text{разів}). \qquad (26)$$

При цьому завжди $(\Delta PS/PS)<1$ згідно з фізичним сенсом імовірності, тоді як відносне значення саме ***надійності*** системи пропорційно зростає в

$$\Delta RS/R(1)=\{RS(X)-R(1)\}/R(1)=X/C(1)\,(\text{разів}), \qquad (27)$$

і тут обмеження типу $(\Delta PS/PS)<1$ за фізичним сенсом показника не існує.

Висновки

Розкриття фізичного змісту властивості ***надійність*** складних систем та адекватне подання її кількісного рівня суттєво змінює постановку економіко-математичної задачі оптимального розподілу ресурсів із метою досягнення потрібного рівня цієї властивості мінімумом витрат. При цьому кардинально підвищується ефективність складних систем зі скороченням витрат ресурсів на її забезпечення.

Література

1. ***Педченко, Г. М.*** *Воєнно-наукове забезпечення операцій військ (сил): монографія / Г. М. Педченко, А. І. Невольніченко, В. І. Шарий В. І.— К.: ВІКНУ ім. Тараса Шевченка, 2011.*

2. ***Шарий, В. І.*** *Системний підхід як методологічна основа воєнної науки / В. І. Шарий, М. П. Крюков, А. І. Невольніченко: зб. праць НАОУ.— 2008.— № 3.*

Л. А. Комарова, А. А. Кильменинов

НАДЕЖНОСТЬ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ В ИНФОРМАЦИОННОМ АСПЕКТЕ

На базе понятийного аппарата теории сложных систем, теории информации и теории массового обслуживания построены математические модели, позволяющие интерпретировать исследования динамики и поиск количественной оценки надежности сложной системы как решение экономико-математической задачи оптимального, отражаемого ходом логической кривой, распределения ресурсов на разных этапах жизненного цикла системы.

Ключевые слова: функциональная устойчивость; состояние дееспособности элемента; состояние отказа элемента; этап создания системы; этап применения системы по назначению; этап исчезания ресурса; надежность сложной системы; энтропия системы.

L. O. Komarova, O. A. Kilmeninov

THE RELIABILITY OF THE DIFFICULT SYSTEM IN AN INFORMATIVE ASPECT

Based on the conceptual aparatus of the complex systems theory, the theory of information and queuing theory, the mathematical models were built allowing the interpretation of the study of the dinamics and quantitative evaluation of reliability of complex systems as the solution of economic and mathematical problem on the optimal, which is cleared by the classical logistic curve allocation of resoures to the different stages of the system's life cycle.

Keywords: functional permanence of the system; state capacity of the element; state failure of the element; stage of creation of the system; stage of using of the system for the purpose; resource depletion stage; reliability of complex systems; entropy of the system.