

УДК 621.325.5:621.382.049.77

М. А. КОСОВЕЦЬ,

Науково-виробниче підприємство «Квантор», Київ;

Л. М. ТОВСТЕНКО,

Інститут кібернетики ім. Глушкова НАНУ, Київ

# ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТУ РОЗТІКАННЯ СПЕКТРА СИГНАЛІВ БИТТЯ 3D-РАДАРА

**Побудовано генеративну модель сигналу биття на виході змішувача, яка дала змогу дослідити розтікання спектра обмежених у часі сигналів биття, а також визначити зсув екстремумів їхньої спектральної щільності відносно частот, присутніх у гармонічних коливаннях моделі.**

**Ключові слова:** генеративна модель; спектр; апроксимація; екстремум.

## Постановка задачі

У науковій лабораторії НВП «Квантор» було здійснено дослідження побудованого FMCW (*Frequency Modulation Continuous Wave*) радара з такими параметрами:

- діапазон лінійної частотної модуляції (ЛЧМ) — 92...96 ГГц;
- період ЛЧМ (тривалість інтервалу спостережень) — 1 мс;
- розрядність АЦП — 16...32 біт;
- кількість циклів нагромадження — від 1 до 10 000;
- кількість шарів відбиття — 3;
- відстань до шарів відбиття — відповідно 0,095; 0,105; 0,106 м;
- середовище поширення хвиль — повітря;
- відношення С/Ш — 80...30 дБ.

Будемо виходити з припущення щодо строгої лінійності закону ЛЧМ і наявності трьох відбивальних поверхонь. Тоді сигнал на виході змішувача FMCW радара можна описати виразом

$$s(t) = U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + U_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

## Основна частина

Розглянемо спочатку аналоговий сигнал у вигляді нескінченного в часі гармонічного коливання (ГК)

$$s(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad -\infty < t < +\infty,$$

Фур'є-образ якого, а точніше, неперервне в часі *пряме перетворення Фур'є* набирає вигляду

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Тут  $S(j\omega)$  — це так звана *спектральна функція*.

*Обернене перетворення Фур'є* виконується згідно з формулою

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Якщо спектральна функція має дискретний (лінійчастий) характер, то дістаємо дискретний за частотою (лінійчастого виду) сигнал

$$pe^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + pe^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0),$$

де  $\delta(\omega)$  — дельта-функція, або функція Дірака.

Випадок сигналу, утвореного з трьох нескінченних у часі ГК, ілюструє рис. 1. Теоретичний лінійчастий спектр відповідного сумарного сигналу зображено на рис. 2.

При розгляді такого сигналу на інтервалі  $t_1 \leq t \leq t_2$  із використанням апарату Фур'є (тобто апарату подання сигналу суперпозицією нескінченних у часі комплексних експонент) постає запитання: в який спосіб слід здійснити продовження цього сигналу за межі інтервалу.

Один із варіантів продовження сигналу  $s(t)$  за межі інтервалу спостереження полягає в тому, аби розглядати його згідно з припущенням, що  $s(t) = 0$  при  $t_1 \geq t \geq t_2$ .

Це еквівалентно множенню нескінченного в часі сигналу  $s(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$  на прямокутне часове вікно

$$w(t) = \sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2),$$

де  $\sigma(t)$  — функція ввімкнення, відома як *функція одиночного стрибка*, або *функція Хевісайда*.

Не обмежуючи загальності міркувань, вважатимемо далі, що  $t_1 = -\tau/2$ ,  $t_2 = \tau/2$  (рис. 3).

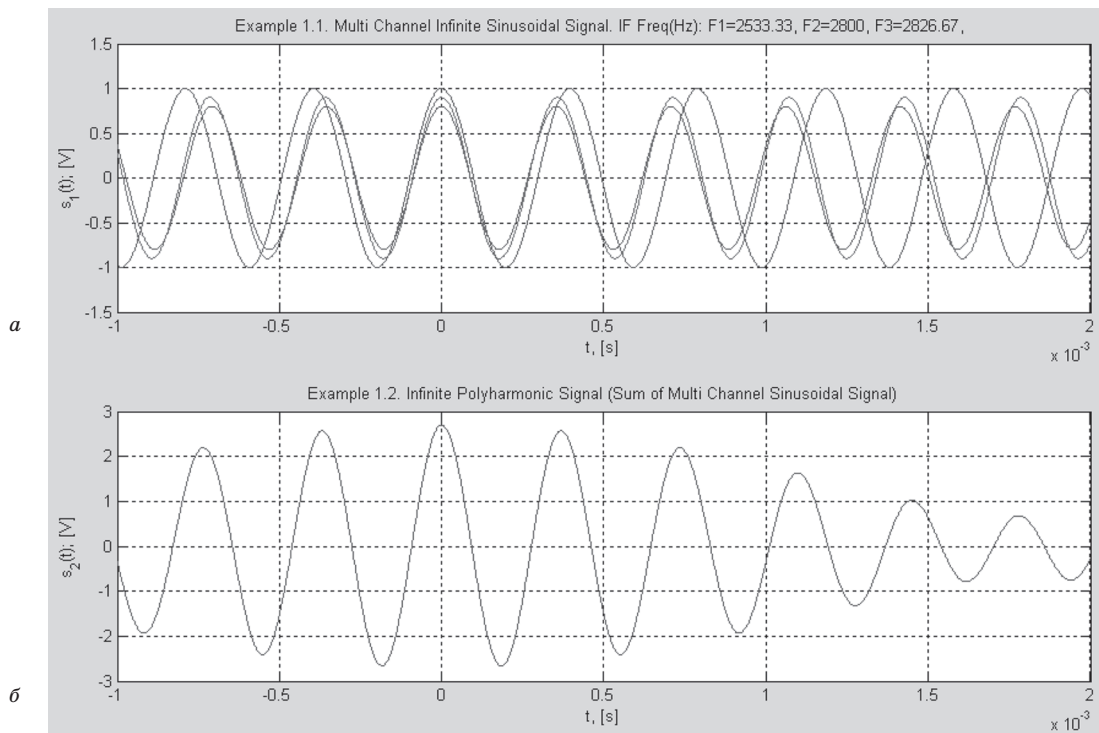


Рис. 1. Три гармонічні коливання (а) та сумарний сигнал биття (б)

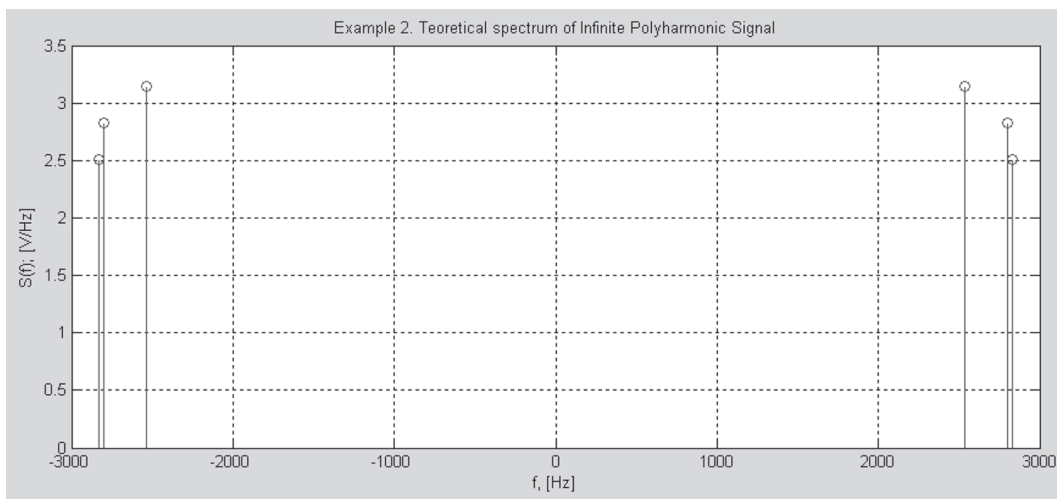


Рис. 2. Лінійчастий спектр нескінченного в часі сумарного сигналу биття

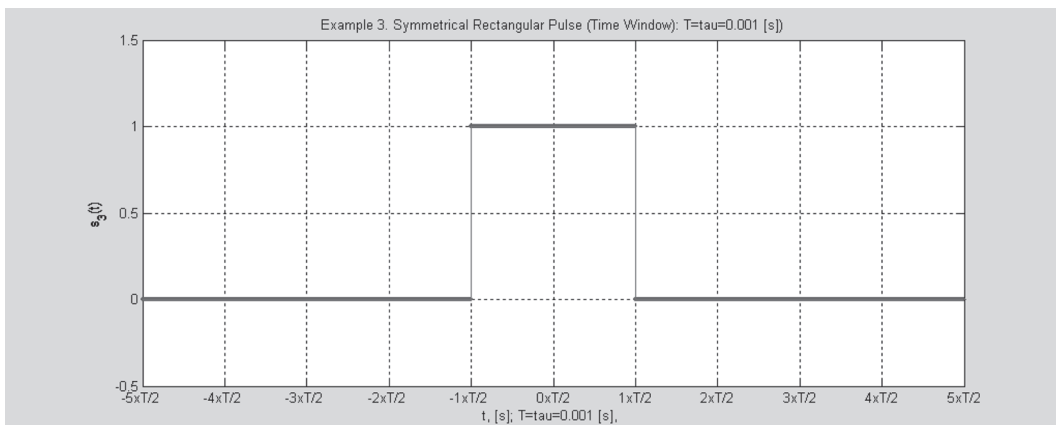


Рис. 3. Симетричне прямокутне вікно, яке визначає інтервал спостережень

Згідно з властивостями перетворення Фур'є перемноження функцій у часовій області рівнозначне згортці їхніх спектрів у частотній області:

$$s(t)w(t) \leftrightarrow S(j\omega) * W(j\omega),$$

де  $W(j\omega)$  — спектр симетричного відносно нуля прямокутного часового вікна тривалістю  $\tau$ ,  $W(j\omega) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$  (рис. 4).

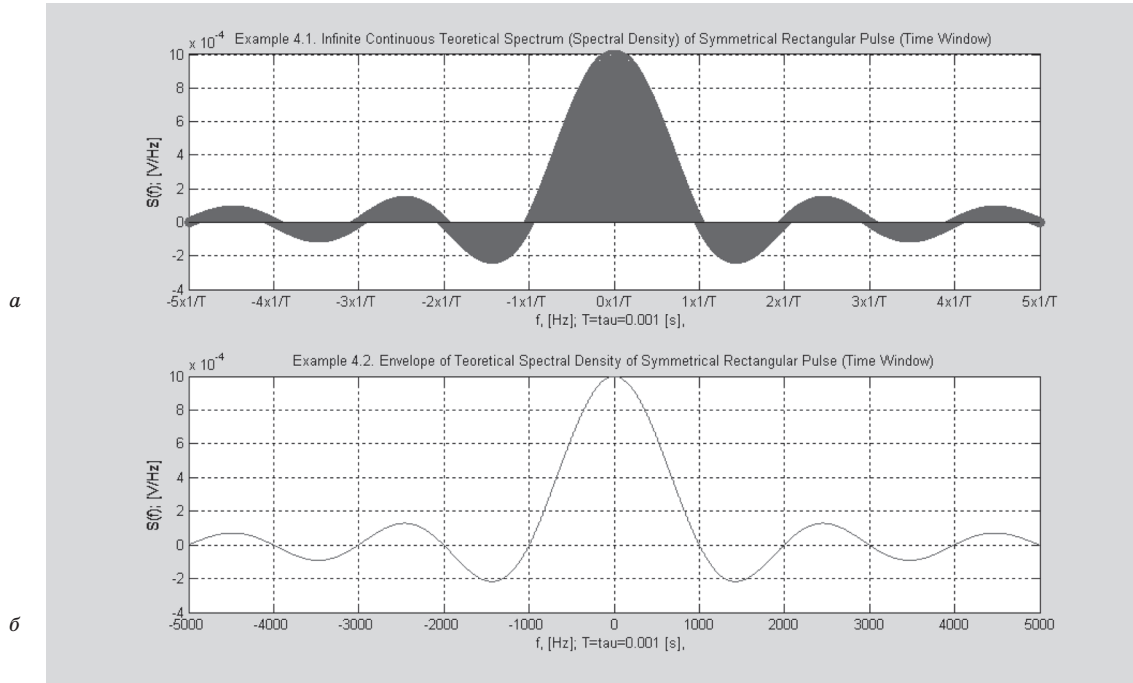


Рис. 4. Неперервна за частотою функція спектральної щільності симетричного прямокутного вікна (а) та її обвідна (б)

Згортка  $S(j\omega) * W(j\omega)$  є суперпозиція зсунених і зважених функцій  $W(j\omega)$ . Можна показати, що оскільки спектр  $S(j\omega)$  має дискретний (лінійчастий) характер, то кожна його дискретна складова виду  $\pi e^{\mp j\omega_m} \delta(\omega \pm \omega_m)$  «запускає» затриману на  $\pm \omega_m$  і зважену множителем  $\pi e^{\mp j\omega_m}$  неперервну за частотою нескінченну функцію

$$W_{\pm m}(j\omega) = \pi e^{\mp j\omega_m} W(j(\omega \pm \omega_m)) = \pi e^{\mp j\omega_m} \tau \frac{\sin((\omega \pm \omega_m)\tau/2)}{(\omega \pm \omega_m)\tau/2}.$$

Таким чином, спектр обмеженого в часі і нуль-продовженого сигналу є неперервним за частотою і нескінченним.

Окремі нескінченні в часі гармонічні коливання та коливання, обмежені прямокутним вікном, а також їхні Фур'є-образи — лінійчасті спектри в першому випадку та неперервні функції спектральної щільності (ФСЦ) у другому — наведено на рис. 5–7. Сумарний нескінченний у часі сигнал биття трьох ГК і сигнал, обмежений прямокутним вікном, а також їхні Фур'є-образи наведено на рис. 8.

Як впливає з рис. 5–8, неперервні ФСЦ обмежених у часі ГК, а також їх суми мають максимальні значення на частотах, відмінних від частот дельта-функцій лінійчастого спектра первинних необмежених у часі коливань.

Фрагменти відповідних ФСЦ, значення частот первинних нескінченних ГК, а також значення частот, на які припадають максимуми ФСЦ обмежених коливань, подано на рис. 9–11.

Зсув максимумів ФСЦ пояснюється тим, що для кожного обмеженого в часі ГК результуюча неперервна ФСЦ утворюється як сума двох неперервних ФСЦ прямокутного вікна, зсунених симетрично відносно нульової частоти. Підсумовування в кожній точці осі частот лівої і правої ФСЦ із максимумами, які збігаються з положеннями дельта-функцій лінійчастого спектра, призводить до того, що сумарна ФСЦ має зсунені максимуми.

Що ж до ФСЦ складного сигналу, який являє собою биття обмежених у часі ГК (див. рис. 8), то сумарна ФСЦ має не три, а один максимум, причому йому відповідає частота, яка не є частотою жодного з первинних ГК, необмежених у часі.

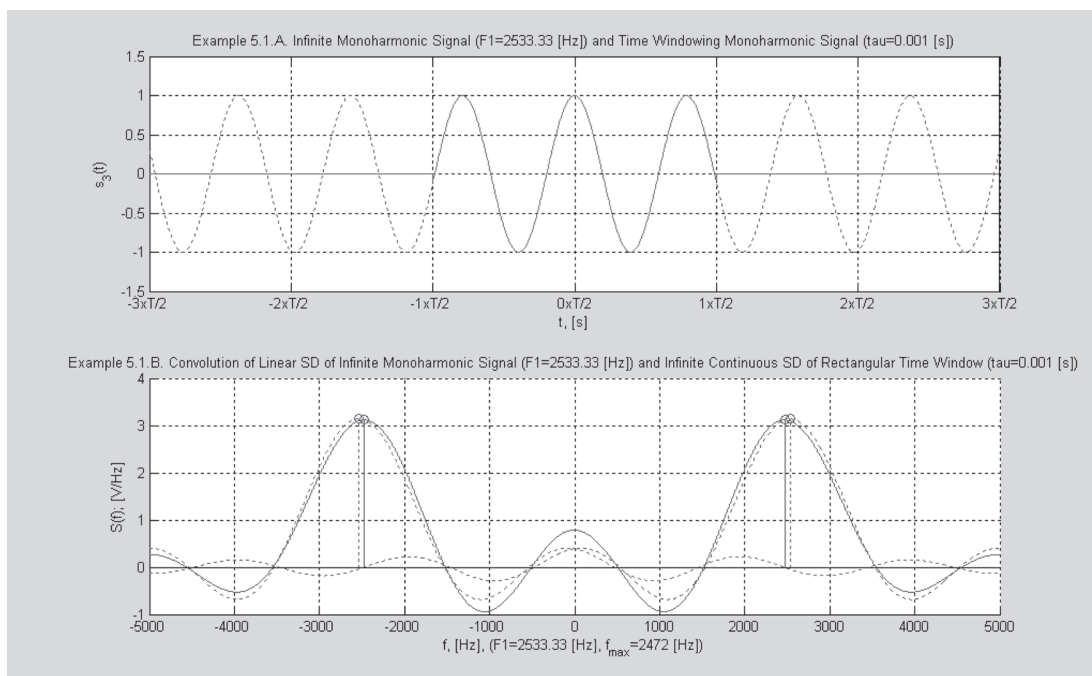


Рис. 5. Нескінченне та обмежене ГК із частотою  $f_1 = 2533,3$  Гц (а) і їхні Фур'є-образи (б)

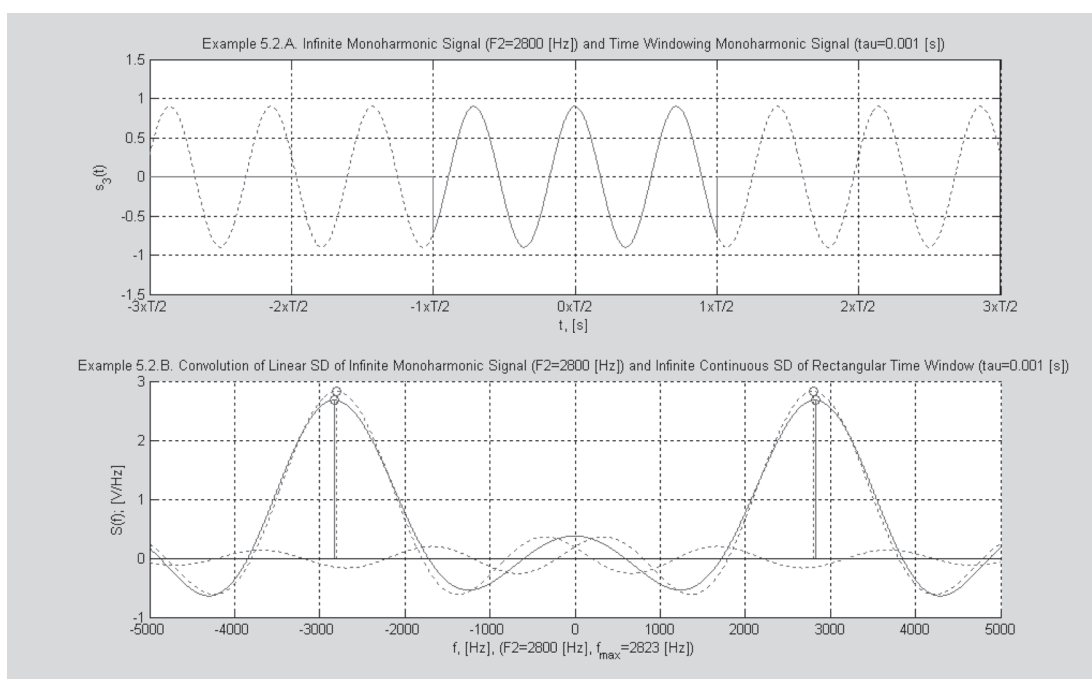


Рис. 6. Нескінченне та обмежене ГК із частотою  $f_2 = 2800,0$  Гц (а) і їхні Фур'є-образи (б)

Іншим способом продовження сигналу за межі інтервалу спостереження є його повторення з періодом  $T$ . Розглядаючи такий нескінченний у часі періодичний сигнал, дістаємо ряд Фур'є з частотами  $f_k = k/T$ . Цим самим здійснюємо, по суті, оцінювання неперервної ФСЩ обмеженого в часі сигналу на сітці зазначених частот. Збільшуючи  $T$  від  $\tau$  до  $+\infty$ , можна зменшувати крок сітки частот від значення  $f_1 = 1/T$  (яке визначає роздільну здатність за частотою і, у свою чергу, визначається тривалістю інтервалу спостереження сигналу) до як завгодно малої величини  $df$ , наближаючись до неперервного оцінювання ФСЩ обмеженого в часі сигналу.

У будь-якому разі, здійснити розрізнення двох близьких спектральних складових  $\omega_i$  і  $\omega_{i+1}$  дискретного (лінійчастого) спектра нескінченного сигналу  $s(t)$  у вигляді двох розщеплених піків ФСЩ вкрай важко, якщо  $|\omega_i - \omega_{i+1}| < 2\pi/T$ . Для виконання такого завдання необхідно якомога ретельніше оцінити неперервну ФСЩ і виконати деконволюцію її за функціями виду  $W(j\omega) = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$ .

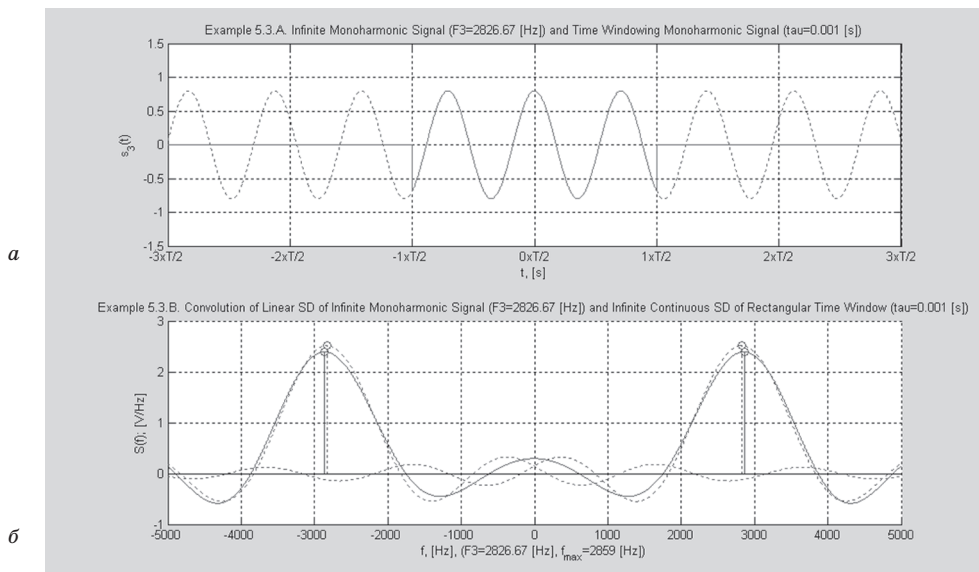


Рис. 7. Нескінченне та обмежене ГК із частотою  $f_3 = 2826,7$  Гц (а) і їхні Фур'є-образи (б)

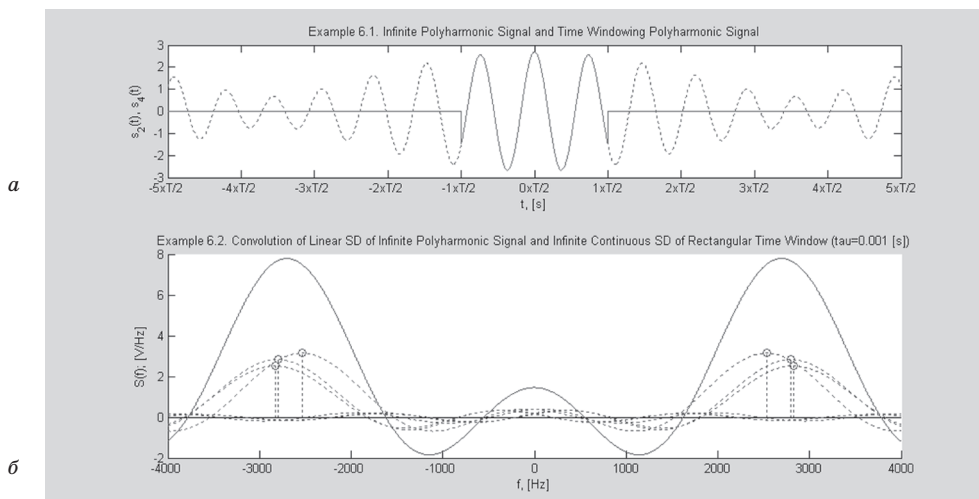


Рис. 8. Нескінченний і обмежений сигнал биття трьох ГК (а) і їхні Фур'є-образи (б)

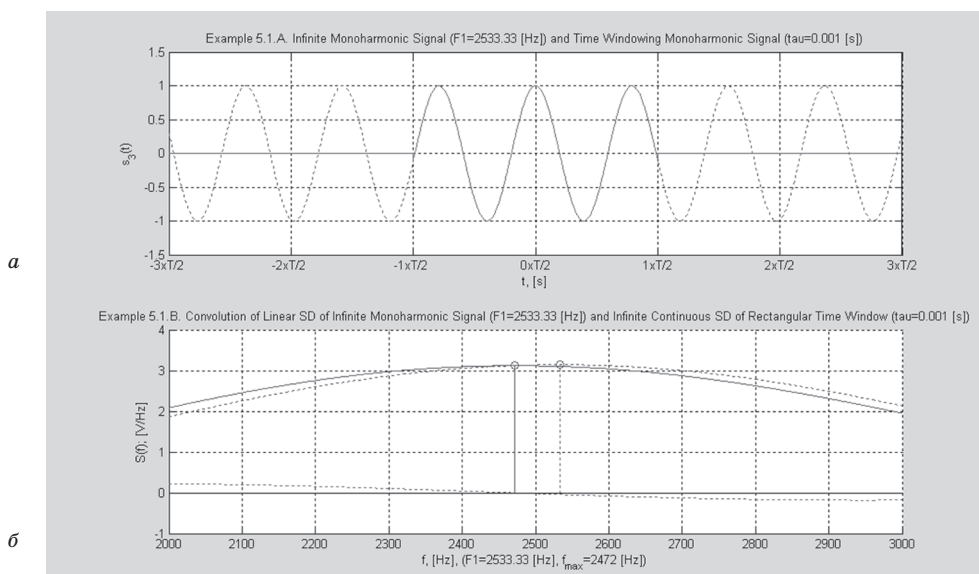


Рис. 9. Обмежене ГК із частотою  $f_1 = 2533,3$  Гц (а) і зсув максимуму його ФШЦ (б)

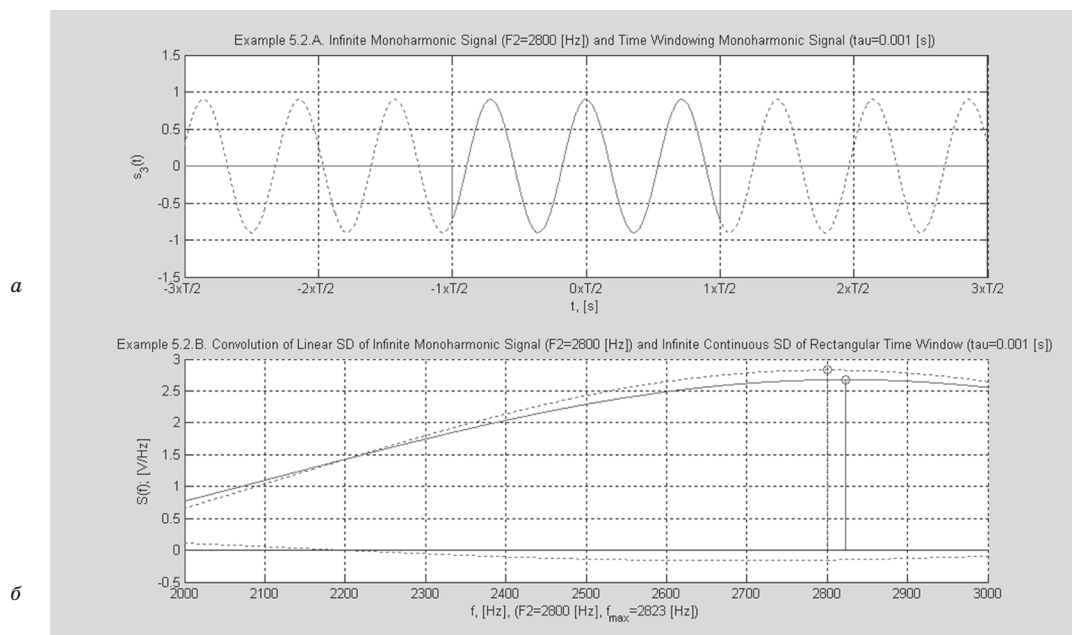


Рис. 10. Обмежене ГК із частотою  $f_2 = 2800,0$  Гц (а) і зсув максимуму його ФСЦ (б)

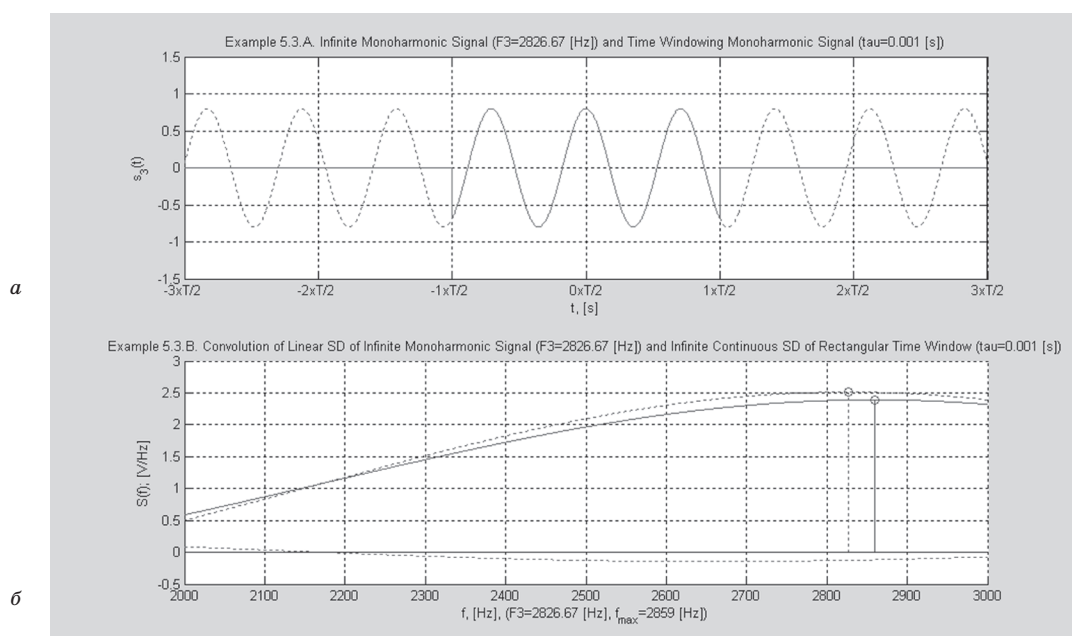


Рис. 11. Обмежене ГК із частотою  $f_3 = 2826,7$  Гц (а) і зсув максимуму його ФСЦ (б)

Обробка спостережуваного сигналу в дискретному часі призводить до аналогічних труднощів, із єдиною відмінністю: дискретний нескінченний гармонічний сигнал  $\cos(\omega_0 n + \varphi)$ ,  $n \in Z$ , має Фур'є-образ (а точніше, дискретне у часі перетворення Фур'є)

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n] e^{-j\omega n}, \text{ де } s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

дискретного (лінійчастого) виду

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\pi e^{j\omega} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\omega} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)), \quad k \in Z.$$

Отже, дискретний (лінійчастий) спектр неперервного дискретного сигналу повторюється в кожній зоні Найквіста так само, як і дискретні (лінійчасті) оцінки ФСЦ на відповідній сітці частот для обмежених у часі дискретних сигналів.

Для здійснення деконволюції можна застосувати методи АР-аналізу або методи гомоморфної обробки сигналів.



Виконати деконволюцію можна також за допомогою оберненої фільтрації в частотній області. Нехай

$$A(z) = \sum_{i=0}^{2N} a_i z^{-i} \text{ — } z\text{-образ функції, що бере участь у конволюції,}$$

$$a_i = \tau \frac{\sin(\omega_i \tau / 2)}{\omega_i \tau / 2} = \tau \frac{\sin(2\pi f_i \tau / 2)}{2\pi f_i \tau / 2}, \quad f_i = (i - N) \cdot \frac{f_s}{N_{FFT}}.$$

Тоді рівняння конволюції в  $z$ -області та його еквівалент в області дискретів даних (тут це дискрети ФСЦ у частотному домені) набирають вигляду

$$Y(z) = X(z)A(z) \Leftrightarrow y[n] = \sum_{i=0}^{2N} a_i x[n - i].$$

Тоді рівняння деконволюції в  $z$ -області та його еквівалент в області дискретів даних (тут це знову дискрети ФСЦ у частотному домені)

$$X(z) = Y(z)/A(z) \Leftrightarrow x[n] = \frac{1}{a_0} y[n] - \sum_{i=0}^{2N} \frac{a_i}{a_0} x[n - i],$$

де  $x[n]$  — дискрети лінійчастого спектра, а  $y[n]$  — дискрети ФСЦ у частотному домені.

### Висновок

Спроби поліпшити амплітудно-частотну характеристику стандартними вікнами Ханнінга, Хемінга, Хана та іншими дають результат, дозволяючи позбавитись бічних пелюсток (розтікання), але лише за рахунок підсилення ефекту накладання. Це пояснюється тим, що в часовій області стандартні вікна фактично звужують інтервал аналізу відносно вихідного прямокутного вікна, тоді як у частотній області вони його розширюють. Щоб уникнути перекривання частотних характеристик, інтервал, на якому здійснюється зважування сигналу, має бути більший за інтервал ДПФ.

### Література

1. **Кнар, W.** Using Field Effect Transistors for Terahertz Imaging / W. Knap, N. Kosovets, A. Drobik: зб. тез VII Міжнар. наук.-техн. конф. «Сучасні інформаційно-комунікаційні технології». COMINFO'2011. — Livadia, 10–14 жовтня 2011 р. — С. 30–32.
2. **Кнар, W.** Signal Processing 3D Terahertz Imaging FMCW Radar for the NDT of material / W. Knap, N. Kosovets, A. Drobik: зб. тез. VI Междунар. науч.-техн. симпозиума «Новые технологии в телекоммуникациях». ГУИКТ–КАРПАТЫ'2013. — Карпати, Вышков, 21–25 января 2013 г. — С. 154–156.
3. **Kosovets, M.** 3D Terahertz Imaging Radar for the NDT of material / M. Kosovets, L. Tovstenko: зб. тез. VI Междунар. науч.-техн. симпозиума «Новые технологии в телекоммуникациях». ГУИКТ–КАРПАТЫ'2013. — Карпати, Вышков, 21–25 января 2013 г. — С. 172–174.
4. **Косовець М. А.** Оцінювання параметрів характеристичних функцій терагерцового ЛЧМ радара / М. А. Косовець, О. І. Павлов, В. П. Смирнов: зб. тез. VI Междунар. науч.-техн. симпозиума «Новые технологии в телекоммуникациях». ГУИКТ–КАРПАТЫ'2013. — Карпати, Вышков, 21–25 января 2013 г. — С. 174–179.
5. **Косовець, М. А.** Дослідження роздільної здатності терагерцового 3D-радара як інтегральної моделі гармонічних коливань за умов значних шумів / М. А. Косовець, О. І. Павлов, О. В. Дробик // Зв'язок. — 2013. — № 6.
6. **Параметричні** моделі гармонічних управління, навігації та зв'язку / [О. В. Дробик, М. А. Косовець, О. І. Павлов, Л. М. Товстенко] // Системи управління, навігації та зв'язку. — 2013. — Вип. 4(28). — С. 53–59.
7. **Дробик, О. В.** Дослідження роздільної здатності терагерцового 3D-радара з використанням диференціальної моделі гармонічних коливань типу I (ДМ-1) / О. В. Дробик, М. А. Косовець, О. І. Павлов // Системи управління, навігації та зв'язку. — 2014. — Вип. 1(29). — С. 38–41.

Н. А. Косовець, Л. Н. Товстенко

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА РАСТЕКАНИЯ СПЕКТРА СИГНАЛОВ БИЕНИЯ 3D-РАДАРА

Построена генеративная модель сигнала биения на выходе смесителя, позволившая исследовать растекание спектра ограниченных во времени сигналов биения, а также определить сдвиг экстремумов их спектральной плотности относительно частот, присутствующих в гармонических колебаниях модели.

**Ключевые слова:** генеративная модель; спектр; аппроксимация; экстремум.

M. A. Kosovec, L. M. Tovstenko

### RESEARCH OF THE EFFECT OF SPECTRUM SPREADING INFINITE IN TIME OF BEATING 3D-RADAR SIGNALS

In the article was built generative model of beating signal at the output of the mixer, which allowed to explore the spreading limited spectrum in time of beating signals and displacement of extremes of their spectral density which relative to frequencies which are presented in the harmonic vibrations model.

**Keywords:** generative model; spectrum; approximation; extremum.