УДК 621.391.833
Л. М. ГРИЩЕНКО, здобувач,
Державний університет телекомунікацій, Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УТВОРЕННЯ СІМЕЙСТВА КІЛЬЦЕВИХ КОДІВ ТИПУ 010101

Побудовано математичну модель утворення кільцевих кодів типу 010101 (одиничні та нульові символи чергуються) і доведено, що за допомогою цієї математичної моделі можна сформувати кільцевий код зазначеного типу будь-якої довжини та з будь-якою кількістю одиничних символів.
Ключові слова: сімейство кільцевих кодів; кодова послідовність; вектор показників зсуву; дельта-фактор.

Вступ

Кільцеві коди [1] будуються за принципом блокових циклічних кодів [2–4]. Кільцевий код — це двійкова квадратна матриця розміром $N \times N$, кожний рядок якої містить m одиничних і $N - m$ нульових символів. Кожний наступний рядок повторює попередній з одночасним кільцевим зсувом символів на один розряд праворуч або ліворуч. Кожний рядок (кодова послідовність) кільцевого коду характеризується дельта-фактором — розподілом нульових і одиничних символів між двома крайніми одиницями, відокремленими найбільшою для даного початкового вектора кількістю нульових символів. Кільцеві коди, що мають дельта-фактор певного типу, утворюють окреме сімейство.

Огляд загальних закономірностей формування сімейств кільцевих кодів на основі дельта-фактора типу 0011100 (одиничні символи в кодовій послідовності розміщено підряд) і типу 010101 (одиничні та нульові символи чергуються) здійснено в [5], де встановлено також принцип побудови кодових послідовностей, що належать цим сімействам, згідно з їхніми значеннями в десятковій системі числення, і побудовано математичну модель формування сімейства кільцевих кодів типу 001110 (одиничні символи розміщено підряд). Тепер побудуємо математичну модель формування сімейства кільцевих кодів типу 010101. При цьому розглядатимемо кільцеві коди, в яких кожна наступна кодова послідовність повторює попередню з одночасним кільцевим зсувом символів на один розряд ліворуч.

Основна частина

Особливості формування сімейства кільцевих кодів типу 010101

Проаналізуємо динаміку змінювання десяткових значень кодових послідовностей сімейства типу 010101, скориставшись інформацією, вміщеною в табл. 1–3.

Таблиця 1

Характеристики кільцевих кодів при $m = 2$ і $N = 4, 5, 6, 7$

Система числення	Довжина N кодової послідовності	Структура кодових послідовностей у двійковій та десятковій системах числення						
Двійкова	4	0101	1010	0101	1010			
Десяткова		5	10	5	10			
Двійкова	5	00101	01010	10100	01001	10010		
Десяткова		5	10	20	9	18		
Двійкова	6	000101	001010	010100	101000	010001	100010	
Десяткова		5	10	20	40	17	34	
Двійкова	7	0000101	0001010	0010100	0101000	1010000	0100001	1000010
Десяткова		5	10	20	40	80	33	66

Таблиця 2

Характеристики кільцевих кодів при $m = 3$ і $N = 6, 7, 8, 9, 10$

Система числення	Структура кодових послідовностей у двійковій та десятковій системах числення				
	Довжина N кодової послідовності				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
Двійкова	010101	0010101	00010101	000010101	0000010101
Десяткова	21	21	21	21	21
Двійкова	101010	0101010	00101010	000101010	0000101010
Десяткова	42	42	42	42	42
Двійкова	010101	1010100	01010100	001010100	0001010100
Десяткова	21	84	84	84	84
Двійкова	101010	0101001	10101000	010101000	0010101000
Десяткова	42	41	168	168	168
Двійкова	010101	1010010	01010001	101010000	0101010000
Десяткова	21	82	81	336	336
Двійкова	101010	0100101	10100010	010100001	1010100000
Десяткова	42	37	162	161	672
Двійкова		1001010	01000101	101000010	0101000001
Десяткова		74	69	322	321
Двійкова			10001010	010000101	1010000010
Десяткова			138	133	642
Двійкова				100001010	0100000101
Десяткова				266	261
Двійкова					1000001010
Десяткова					522

Таблиця 3

Характеристики кільцевих кодів при $m = 2, 3, 4, 5$ і $N = 10$

Система числення	Структура кодових послідовностей у двійковій та десятковій системах числення			
	Кількість m одиничних символів			
	2	**3**	**4**	**5**
Двійкова	0000000101	0001010101	0000010101	0101010101
Десяткова	5	21	85	341
Двійкова	0000001010	0000101010	0010101010	1010101010
Десяткова	10	42	170	682
Двійкова	0000010100	0001010100	0101010100	0101010101
Десяткова	20	84	340	341
Двійкова	0000101000	0010101000	010101000	1010101000
Десяткова	40	168	720	682
Двійкова	0001010000	0101010000	0101010001	0101010101
Десяткова	80	336	337	341
Двійкова	0010100000	1010100000	1010100010	1010101010
Десяткова	160	672	674	682
Двійкова	0101000000	0101000001	0101000101	0101010101
Десяткова	320	321	325	341
Двійкова	1010000000	1010000010	1010001010	1010101010
Десяткова	640	642	650	682
Двійкова	0100000001	0100000101	0100010101	0101010101
Десяткова	257	261	277	341
Двійкова	1000000010	1000001010	1000101010	1010101010
Десяткова	514	522	554	682

Аналізуючи дані табл. 1–3, встановлюємо такі закономірності:

1) найменше десяткове значення в кожному стовпці визначається за формулою:

$$n_1 = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k};$$

2) кожна сукупність $C_k(N, m)$ десяткових значень кодових послідовностей являє собою об'єднання двох множин S_1 і S_2, які далі схарактеризуємо докладніше.

Між значеннями сусідніх елементів множини S_1 існує лінійна залежність: кожний наступний елемент вдвічі більший, ніж попередній, причому кількість таких елементів дорівнює $N - 2(m - 1)$.

Кількість елементів множини S_2 дорівнює $2(m - 1)$. Ця множина поділяється на групи, по два елементи в кожній, і таких груп усього $m - 1$. Різниця r_1 між першим елементом s_{21} множини S_2 та передостаннім елементом s_{14} множини S_1 обчислюється за формулою:

$$r_1 = 2^{N-2m} - 1.$$

Другий елемент s_{22} множини S_2 вдвічі більший за s_{21}. Різниця r_2 між третім елементом s_{23} множини S_2 та першим її елементом s_{21} визначається за формулою $r_2 = 2^2 \cdot r_1$.

Четвертий елемент s_{24} множини S_2 вдвічі більший за третій її елемент s_{23}. Різниця r_3 між п'ятим елементом множини S_1 і третім елементом s_{23} множини S_2 така: $r_3 = 2^3 \cdot r_2$. У загальному вигляді маємо:

$$r_i = 2^i \cdot \left(2^{N-2m} - 1\right),$$

де $i = 1, 2, ..., m - 1$.

Поглиблений аналіз сукупності десяткових значень сімейства кільцевих кодів типу 010101 дозволив побудувати математичну модель формування кодових послідовностей даної довжини N при даній кількості m одиничних символів.

Нехай $C_k(N, m)$ — сукупність десяткових значень розглядуваних кодових послідовностей, $k = 0, ..., N - 1$.

Тоді

$$C_k(N, m) = S_1 \cup S_2,$$

де $S_1 = \left\{s_{11}, s_{12}, ..., s_{1(N-2(m-1))}\right\}$, $S_2 = \left\{s_{21}, s_{22}, ..., s_{2(2(m-1))}\right\}$.

Запишемо загальні вирази для елементів множини S_1.

$$s_{11} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} \text{ (найменше десяткове значення кодової послідовності)}$$

$$s_{12} = 2 \cdot s_{11};\ s_{13} = 2 \cdot s_{12}, ..., s_{1(N-2(m-1))} = 2^{N-2(m-1)} \cdot s_{11},$$

а також для груп елементів множини S_2:

$\left\{s_{21}, s_{22}\right\}, \left\{s_{23}, s_{24}\right\}, ..., \left\{s_{2(2(m-1)-1)}, s_{2(2(m-1))}\right\}$ і кількість таких груп дорівнює $m - 1$.

Загальні вирази для елементів множини S_2 набирають такого вигляду:

$$s_{21} = s_{1(N-2(m-1)-1)} - \left(2^{N-2m} - 1\right);$$
$$s_{22} = 2 \cdot s_{21};$$
$$s_{23} = s_{21} - 2^2 \cdot \left(2^{N-2m} - 1\right);$$
$$s_{24} = 2 \cdot s_{23};$$
$$s_{2(2(m-1)-1)} = s_{2(2(m-1)-3)} - 2^{m-1} \cdot \left(2^{N-2m} - 1\right);$$
$$s_{2(2(m-1))} = 2 \cdot s_{2(2(m-1)-1)}.$$

Обчислимо елементи множин S_1 і S_2 для випадку, коли $N = 9$, а $m = 3$.

$$s_{11} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^{2k} = 2^0 + 2^2 + 2^4 = 21.$$

$s_{12} = 2 \cdot 21 = 42;$
$s_{13} = 2 \cdot 42 = 84;$
$s_{14} = 2 \cdot 84 = 168;$
$s_{15} = 2 \cdot 168 = 336;$
$s_{21} = 168 - (2^{9-2\cdot 3} - 1) = 168 - 7 = 161;$
$s_{22} = 2 \cdot 161 = 322;$
$s_{23} = 161 - 2^2 \cdot (2^{9-2\cdot 3} - 1) = 161 - 28 = 133;$
$s_{24} = 2 \cdot 133 = 266.$

Результати обчислень зведено в табл. 4.

Таблиця 4

Характеристики кільцевих кодів при $N = 9$ і $m = 3$

Структура двійкового коду	Значення кодової послідовності в десятковій системі числення	Структура ВПЗ
	Множина S_1	62644626
000010101	$s_{11} = 21$	
000101010	$s_{12} = 42$	
001010100	$s_{13} = 84$	
010101000	$s_{14} = 168$	
101010000	$s_{15} = 336$	
	Множина S_2	
010100001	$s_{21} = 161$	
101000010	$s_{22} = 322$	
010000101	$s_{23} = 133$	
100001010	$s_{24} = 266$	

Висновки

1. Множина десяткових значень кодових послідовностей кільцевих кодів сімейства типу 1010100 складається з двох підмножин, для формування яких визначено математичні залежності.

2. Побудована на базі зазначених залежностей математична модель дозволяє сформувати сімейство кільцевих кодів типу 010101 для кодових послідовностей будь-якої довжини та з будь-якою кількістю одиничних символів за умови, що кожний наступний рядок кодової послідовності повторює попередній з одночасним кільцевим зсувом символів на один розряд ліворуч, подавши сукупність десяткових значень кодових послідовностей кільцевого коду у вигляді об'єднання двох множин, елементи яких визначаються за виведеними формулами.

Список використаної літератури

*1. **Дикарев, А. В.** Коды на основе двоичных колец / А. В. Дикарев // Системи управління, навігації та зв'язку.— 2014.— Вип. 1 (29).— С. 50–53.*

*2. **Дикарев, А. В.** Постулаты кольцевых кодов / А. В. Дикарев // Зв'язок.— 2013.— № 5 (105).— С. 53–56.*

*3. **Дикарев, А. В.** Некоторые закономерности кольцевых кодов / А. В. Дикарев / Системи управління, навігації та зв'язку.— 2014.— Вип. 3 (31).— С. 51–55.*

*4. **Дикарев, А. В.** Семейства цепочечных кольцевых кодов / А. В. Дикарев // Системи управління, навігації та зв'язку.— 2014.— Вип. 1 (29).— С. 36–40.*

*5. **Грищенко, Л. М.** Закономірності формування сімейства кільцевих кодів. Математична модель / Л. М. Грищенко // Зв'язок.— 2016.— № 5.— С. 27–30.*

Рецензент: канд. техн. наук, доцент **О. В. Дікарев**, Державний університет телекомунікацій, Київ.

Л. Н. Грищенко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЗДАНИЯ СЕМЕЙСТВА КОЛЬЦЕВЫХ КОДОВ ТИПА 010101

Построена математическая модель создания кольцевых кодов типа 010101 (единичные и нулевые символы чередуются) и доказано, что при помощи данной математической модели можно сформировать кольцевой код указанного типа любой длины и с любым количеством единичных символов.

Ключевые слова: семейство кольцевых кодов; кодовая последовательность; вектор показателей сдвига; дельта-фактор.

L. M. Hryshchenko

MATHEMATICAL MODEL FOR CREATING THE 010101 TYPE FAMILY RING CODES

The mathematical model for creating the 010101 type family ring codes (unit symbols and null symbols alternate) has been constructed and it is proved that by using this mathematical model a ring code of this type of any length and any number of unit characters can be formed.

Keywords: ring codes family; code sequence; shift indexes vector; delta-factor.