УДК 517.518.4:519.65

О. В. НЕГОДЕНКО,
Державний університет телекомунікацій, Київ

МОДЕЛІ ДЛЯ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ

У статті розглянуто моделі для обробки аналогових сигналів на основі тригонометричних сплайнів. Порушено питання про розгляд задач щодо подання аналогових сигналів у цифровій формі та їх подальшу обробку. Головну увагу приділено властивостям гладкості аналогових інформаційних сигналів, які характеризують поводження сигналу в деякому околі довільної точки, що належить області задання сигналу. Виокремлено клас сигналів із відомими диференціальними властивостями. Висвітлено моделювання інформаційних сигналів, коли в ролі моделей таких сигналів виступають класи тригонометричних сплайнів. Показано переваги та недоліки зазначених сплайнів. На основі відомих функцій здійснено інтерполяцію за допомогою тригонометричних сплайнів. Виявлено ефект Гіббса на кінцях і в середині відрізка інтерполяції. Розглянуто вплив порядку тригонометричного сплайна на похибку інтерполяції.

Ключові слова: інформаційні сигнали; перетворення Фур'є; прості тригонометричні сплайни; обробка сигналів; порядок тригонометричних сплайнів.

Вступ

У першій половині XX сторіччя інформаційно-вимірювальні системи оперували аналоговими сигналами, які після їх перетворення підлягали тим чи іншим видам обробки з метою вилучення інформації, яка становить інтерес. При цьому існувала потенційна можливість повністю враховувати інформацію, що її переносили сигнали.

При створенні сучасних інформаційних систем застосовуються цифрові технології, що передбачає подання вихідних даних у цифровій формі. Водночас підвищується інтерес розробників нової апаратури до задач, пов'язаних із питаннями подання аналогових сигналів у цифровій формі та подальшої їх обробки [1; 4].

Роль критеріїв, котрі характеризують якість такого подання, здебільшого відіграють вимоги щодо збереження форми сигналу чи його потужності.

Із математичного погляду такі критерії можна тлумачити як відстані у відповідних просторах між неперервною функцією певного класу (аналоговим сигналом) і функцією, що являє собою неперервну модель сигналу. У загальному випадку моделлю сигналу слугує багатопараметрична функція, параметри якої визначаються з урахуванням числових значень аналогового сигналу. При цьому припускають, що за достатньо високої якості подання сигналу висока точність результатів його аналізу забезпечується автоматично.

Основна частина

Постановка багатьох задач обробки сигналів не має сенсу, якщо не враховувати властивостей гладкості аналогових інформаційних сигналів, котрі характеризують поводження сигналу в деякому околі довільної точки t_0, що належить області задання сигналу. Ці властивості свідчать про існування певної кількості неперервних похідних досліджуваного сигналу, а також дають відомості про деякі аналітичні властивості зазначених похідних.

Виокремлення класів вимірюваних сигналів із відомими диференціальними властивостями, як і їх моделювання, стали можливими лише з появою нового класу математичних функцій — поліномійних та ермітових сплайнів [2].

Далі йдеться про моделювання реальних інформаційних сигналів із урахуванням їхніх диференціальних властивостей, коли як моделі цих сигналів використовуються класи тригонометричних сплайнів [1; 5; 6].

Сучасні інформаційно-вимірювальні системи оперують із дискретною формою вимірюваних сигналів. Що ж до процесу дискретизації сигналу, то він полягає в такому.

Нехай на проміжку часу $[0,\ T]$ дійсної осі спостерігається аналоговий сигнал $f(t)$ із періодом $T = 2\pi$. Цей сигнал після відповідного масштабування подають на вхід аналого-цифрового перетворювача (рис. 1), отримуючи послідовність $\{f(t_i)\}_{i=1}^{N}$ (N — дійсне, $N = 2n + 1$, $n = 1,2,\ldots$) значень сигналу $f(t)$ у деякі рівновіддалені моменти часу $\{t_i\}_{i=1}^{N}$.

Отже, на проміжку $[0,\ 2\pi)$ задають сітку $\Delta_N^{(0)} = \left\{t_i^{(0)}\right\}_{i=1}^{N}$, $t_i^{(0)} = (i-1)h$, де h — крок дискретизації, $h = \dfrac{2\pi}{N}$.

Сигналу $f(t)$ ставлять у відповідність послідовність $\left\{f_i^{(0)}\right\}_{i=1}^{N}$ його значень, де $f_i^{(0)} = f(t_i^{(0)})$.

Рис. 1. Аналого-цифрове перетворення сигналу

Класи функцій, до яких належать аналогові сигнали та їхні математичні моделі, можна задавати в різний спосіб.

Найбільш просто інтерполяційні моделі сигналів будуються в тому разі, коли роль цих моделей відіграють алгебраїчні многочлени, котрі як апарат інтерполяції функцій мають, утім, ряд недоліків. Передусім ідеться про їхню аналітичність і той факт, що вони не завжди збігаються до інтерпольованої функції на рівномірних сітках.

Тому особливий інтерес у задачах відновлення дискретних сигналів становлять деякі модифікації многочленних наближень, такі як поліномійні сплайни — найкращий лінійний апарат наближення класів диференційованих сигналів. Проте слід зазначити, що поліномійні сплайни також мають певні недоліки. Це, зокрема, складність побудови сплайнів високих степенів і неможливість уніфікації методів подання та обробки інформаційних сигналів. Тому привертають увагу нові класи функцій, які зберігають переваги поліномійних сплайнів і позбавлені їхніх недоліків [3].

У цій статті розглядається клас тригонометричних сплайнів, що є неперервними та мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го $(r = 1,2,...)$ порядку включно.

Нехай тригонометричний сплайн, що здійснює інтерполяцію аналогового сигналу $f(t)$ у вузлах $\Delta_N^{(0)} = \{t_i^{(0)}\}_{(i=1)}^N$ $(N = 2n+1,\ n = 1,2,...)$ рівномірної сітки з кроком h, $h = 2\pi\dfrac{i-1}{N}$, набирає вигляду

$$S_{t_r}(f,\Delta_N,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k(r,N)\left[a_k^*\Phi_k^c(r,N,t)+b_k^*\Psi_k^s(r,N,t)\right].$$

Тут використано такі позначення:

$$\Phi_k^c(r,N,t)=\frac{\cos kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right];\ \Psi_k^s(r,N,t)=\frac{\sin kt}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}}-\frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}}\right];$$

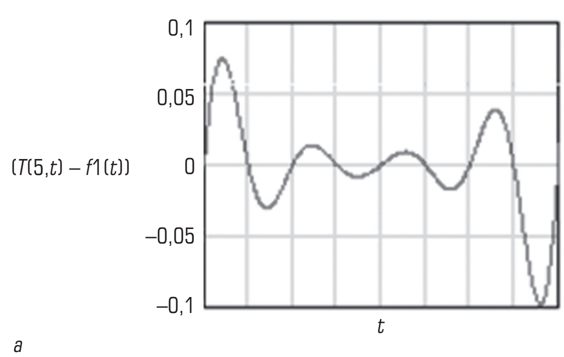
$$\left[a_k(r,N)\right]^{-1}=\frac{1}{k^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{1}{(mN-k)^{r+1}}\right];\ a_0=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i);\ a_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\cos kt_i;\ b_k^*=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(t_i)\sin kt_i,$$

$k = 1,2,\ldots,n$; r — степінь сплайна.

Параметр r визначає гладкість сплайна, оскільки тригонометричні сплайни r-го порядку мають абсолютно неперервну похідну $(r-1)$-го порядку, $r = 1,2,\ldots$.

Тому при практичному використанні цих сплайнів постає задача про вибір порядку сплайна і дослідження його пливу на похибку інтерполяції.

Розглядався випадок, коли за наближену функцію брали функцію $f(t) = \sin\dfrac{3}{4}t$, $t\in[0, 2\pi]$. На відрізку $[0, 2\pi]$ задавали дев'ять вузлів інтерполяції і знаходили значення функції в цих вузлах. По цих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і при різних значеннях параметра r обчислювали похибку інтерполяції (рис. 2). У результаті порівняння зазначених похибок виявилось, що зі збільшенням порядку сплайна похибка інтерполяції зростала (таблиця).



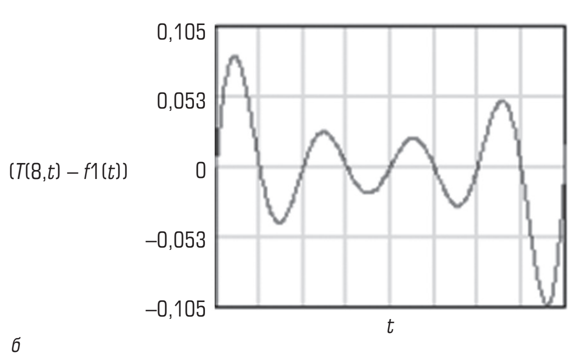
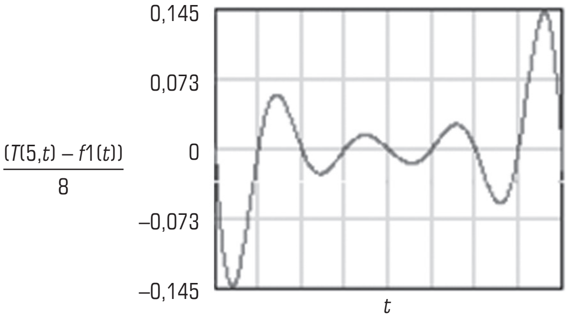


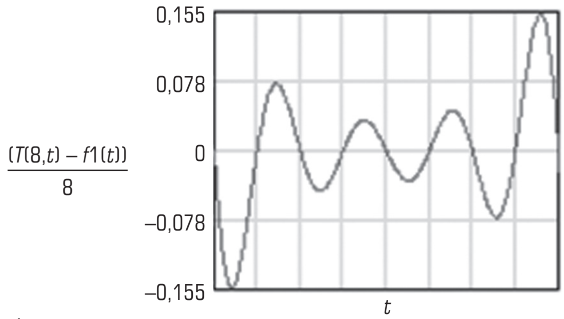
Рис. 2. Похибка інтерполяції при двох різних значеннях r: $r = 5$ (a); $r = 8$ ($б$)

Річ у тім, що при застосуванні тригонометричних сплайнів для наближення функцій у загальному випадку на кінцях відрізка інтерполяції спостерігається відомий ефект Гіббса, який суттєво впливає на точність наближення.

В іншому прикладі розглядалась функція $f(t) = t + 1$, $t \in [0, 2\pi]$. Як і раніше, на відрізку $[0, 2\pi]$ задавали дев'ять вузлів інтерполяції і знаходили значення функції в цих вузлах. По згаданих вузлах будували тригонометричний інтерполяційний сплайн і залежно від його порядку знаходили похибку інтерполяції (рис. 3). Як і в попередньому прикладі, у результаті порівняння цих похибок виявилось, що зі збільшенням порядку сплайна похибка інтерполяції також збільшувалась (див. таблицю).



а



б

Рис. 3. Похибка інтерполяції при двох різних значеннях *r*: *r* = 5 (*а*); *r* = 8 (*б*)

Якщо ж розглядати середню частину відрізка, то можна спостерігати посилення впливу ефекту Гіббса на середину відрізка інтерполяції.

Функція	Порядок сплайна	Похибка інтерполяції на кінцях відрізка	Похибка інтерполяції в середині відрізка
$f(t) = \sin\frac{3}{4}t$	3	0,086	0,023
	5	0,1	0,039
	8	0,105	0,052
	10	0,107	0,053
$f(t) = t + 1$	3	0,125	0,035
	5	0,145	0,048
	8	0,155	0,072
	10	0,165	0,083

Висновки

♦ У більшості випадків інформація $f(t)$ про сигнал являє собою рівномірну послідовність миттєвих значень цього сигналу у вузлах сітки Δ_N, отриманих у результаті операцій квантування за рівнем і дискретизації за часом неперервного сигналу.

Для подальшого відновлення даного сигналу розв'язують задачу інтерполяції по заданих вузлах.

♦ У цій статті роль наближувальної функції відіграють тригонометричні сплайни.

♦ Вплив диференціальних властивостей фундаментальних тригонометричних сплайнів на похибку інтерполяції як на кінцях, так і в середині відрізка досліджено на тестових прикладах.

♦ Установлено, що зі збільшенням порядку сплайна похибка інтерполяції зростає, бо при цьому посилюється шкідливий вплив ефекту Гіббса.

Список використаної літератури

1. ***Денисюк В. П.*** *Тригонометричні ряди та сплайни. Київ: НАУ, 2017. 212 с.*

2. ***Alexandru Mihai Bica, Constantin Popescu.*** *Fuzzy spline interpolation with optimal property in parametric form // Information Sciences. 2013. Vol. 236. P. 138–155.*

3. ***Денисюк В. П.*** *Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни: монографія. Київ: ПАТ «Віпол», 2015. 296 с.*

4. ***Гонсалес Р., Вудс Р.*** *Цифровая обработка изображений. Москва: Техносфера, 2006. 1072 с.*

5. ***Негоденко О. В.*** *Математичні моделі на основі фундаментальних тригонометричних сплайнів // Вісник Черкас. нац. ун-ту. Черкаси, 2017. № 1. С. 115–121 (Серія «Фіз.-мат. науки»).*

6. ***V. Denysiuk, E. Negodenko.*** *Mathematical models on the basis of fundamental trigonometric splines // Science and Education a New Dimension. 2018. VI(18). Issue: 158. P. 14–18 (Natural and Technical Sciences).*

Рецензент: доктор техн. наук, доцент **В. В. Онищенко**, Державний університет телекомунікацій, Київ.

Е. В. Негоденко

МОДЕЛИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Цифровые технологии широко применяются при создании современных информационных систем. При этом предусмотрено представление выходных данных в цифровой форме. Возникает повышенный интерес разработчиков новой аппаратуры к задачам, связанным с представлением аналогового сигнала в цифровой форме и дальнейшей его обработкой.

В статье рассмотрены модели для обработки аналоговых сигналов на основе тригонометрических сплайнов. Освещены вопросы о представлении аналогового сигнала в цифровой форме и дальнейшей его обработке. Особое внимание уделено свойствам гладкости аналоговых информационных сигналов, которые характеризуют поведение сигнала в некоторой окрестности произвольной точки, принадлежащей области задания сигнала. Очерчен класс сигналов с известными дифференциальными свойствами. Описано моделирование информационных сигналов, когда в роли моделей выступают классы тригонометрических сплайнов. Раскрыты преимущества и недостатки тригонометрических сплайнов. На основе известных функций проведена интерполяция при помощи таких сплайнов, с учетом эффекта Гиббса на концах и в середине отрезка интерполяции. Исследовано влияние порядка сплайна на погрешность интерполяции.

Ключевые слова: информационные сигналы; образования Фурье; простые тригонометрические сплайны; обработка сигналов; порядок тригонометрических сплайнов.

O. V. Negodenko

MODELS FOR PROCESSING OF INFORMATION SIGNALS BASED ON TRIGONOMETRIC SPLINES

Digital technologies are widely used at creation of the modern informative systems. This transformation envisages presentation of weekend of data in a digital form. There is an increase interest of developers of new apparatus in tasks, what presentations of analog signal related to the questions in a digital form and them further treatment.

From the mathematical point of view these criteria can be shown as distances in corresponding spaces between the continuous function of certain class (by an analog signal), and function that shows a soba the continuous model of signal. In a role of model of signal in general case examine a function the parameters of that are determined with taking into account of digital values of analog signal. Assume thus, that at high enough quality of presentation of signal is automatically provided high exactness of results of analysis of this signal.

Raising of many tasks of treatment of signals does not make sense, if not to take into account property of smoothness of analog informative signals, that characterize behavior of signal in some vicinity of arbitrary point of t_0, belong the area specify to the signal. These properties show existence the determined amount of continuous derivatives of the investigated signal, and also information about some analytical properties of these derivatives.

In the article the considered models are for treatment of analog signals on the basis of trigonometric splines. The question of consideration of tasks of presentation of analog signal is affected in a digital form and them further treatment Special attention is attracted by properties of smoothness of analog informative signals, that characterize behavior of signal around of arbitrary point, that belong to the interval of signal. The class of signals is set with well-known differential properties. The design of informative signals is examined; thus in a role of models of these signals the classes of trigonometric splines are used. Advantages and lacks of trigonometric splines are shown. On the basis of well-known functions interpolation is conducted by means of trigonometric splines. There is the phenomenon of Gibbs on ends and into the segment of interpolation. Influence of order trigonometric is examined to the spline on the error of interpolation.

Keywords: signals; transformations of Fourier; simple trigonometric splines; treatment of signals; order of trigonometric splines.