УДК 517.518.4:519.65 **DOI:** 10.31673/2412-9070.2019.053539

В. В. ОНИЩЕНКО, доктор техн. наук, професор;
О. В. НЕГОДЕНКО, канд. техн. наук;
О. А. ЗОЛОТУХІНА, канд. техн. наук,
Державний університет телекомунікацій, Київ

АПРОКСИМАЦІЙНІ СПЛАЙН-МОДЕЛІ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянуто моделі інформаційних сигналів на основі апроксимаційних фундаментальних тригонометричних сплайнів, які застосовують у процесі розв'язання різних завдань теорії і практики в телекомунікаціях. Показано математичні підходи та вимоги щодо побудови даних моделей. Наведено доцільність використання апроксимаційних моделей у разі, коли значення сигналу під час дискретизації вимірюється з малими похибками, але сам сигнал являє собою адитивну суміш корисного сигналу і випадкової завади.

Ключові слова: сигнали; апроксиматичні моделі; фундаментальні тригонометричні сплайни; перетворення Фур'є.

Вступ

Постановка проблеми. У сучасних телекомунікаційних системах існують завдання, пов'язані з необхідністю оптимізації структурних і функціональних характеристик окремих елементів, рівнів і мереж у цілому.

Передусім виникає потреба в оптимальному використанні обмежених фізичних, канальних, мережних, обчислювальних та інших ресурсів. Тому вибір моделей інформаційних сигналів є важливим об'єктом дослідження фахівців сьогодення [1].

У процесі розгляду інтерполяційних моделей вимірювальних сигналів іноді вважають, що значення сигналів у вузлах інтерполяційних сіток є точними. Але таке припущення не завжди є прийнятним і тоді застосування інтерполяційних моделей сигналів недоцільне. У таких випадках використовують апроксимаційні моделі сигналів, які також можуть бути застосовані, якщо кількість параметрів моделей є меншою за розмірність масиву значень дискретного сигналу. Застосування апроксимаційних моделей доцільно й у разі, коли значення сигналу під час дискретизації вимірюється з малими похибками, але сам сигнал являє собою адитивну суміш корисного сигналу і випадкової завади.

Теорія й методи апроксимації реальних процесів і режимів мережних елементів, а також функцій мережі набувають дедалі більшої актуальності на етапі розв'язання різних завдань теорії й практики в телекомунікаціях. Дотепер особливої популярності дістали поліноміальна і дробово-раціональна апроксимації. Але ці методи мають обмежені можливості. Так, під час їх використання в околі особливих точок можливі непрогнозовані локальні збурення, а також помічається погана збіжність тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Апарат сплайн-апроксимації, який з успіхом розвивається останніми роками, розроблявся науковцями, серед яких I. Schoenberg, M. Unser, Стечкіна С. Б., Субботіна Ю. Н., Зав'ялова Ю. С., а також такі українські вчені, як Корнейчук М. П., Денисюк В. П., Шелевицький І. В., Шутка М. О., Приставко О. П. Серед основних переваг сплайн-апроксимації доцільно зазначити те, що сплайни стійкіші щодо локальних збурень, тобто поводження сплайну в околі точки не позначається на поводженні сплайну в цілому, як, наприклад, це спостерігається у разі поліноміальної інтерполяції. Також наявна хороша збіжність сплайн-інтерполяції на відміну від поліноміальної. Зокрема, для функцій із нерегулярними властивостями гладкості незаперечний пріоритет належить сплайн-інтерполяції.

Аналіз публікацій також дає змогу виявити низку недоліків, що мають поліноміальні сплайни. До них належать неможливість уніфікації методів подання й оброблення сигналів; складність алгоритму побудови сплайнів високих степенів, що супроводжується повільною швидкістю оброблення інформації, і як результат — затримання даних і неможливість працювати в масштабі реального часу [3; 4].

Постановка завдання. Сьогодні актуальним є застосування нових класів функцій, які мають переваги і є вільними від недоліків поліноміальних сплайнів. До таких нових класів функцій слід віднести класи фундаментальних тригонометричних сплайнів.

Мета даної роботи полягає у створенні теорії і методів тригонометричної сплайн-апроксимації, що уможливлює більш ефективне розв'язання різних завдань у телекомунікаціях для підвищення показників якості телекомунікаційних систем.

Основна частина

Існують два підходи до побудови апроксимаційних моделей сигналів: континуальний та дискретний.

Континуальний підхід до побудови апроксимаційних моделей ґрунтується на теорії узагальнених рядів Фур'є. Для введення апроксимаційних тригонометричних сплайнів доцільно розглянути задачу апроксимації періодичних функцій. Якщо простір Θ містить множину 2π-періодичних функцій, то як система ортогональних, 2π-періодичних функцій використовуються функції вигляду

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos mt,\ \sin mt,\ \ldots\ . \tag{1}$$

У цьому разі скінченні суми узагальнених рядів Фур'є збігаються зі скінченними сумами тригонометричних рядів Фур'є. Інколи у застосуваннях зручно розглядати скінченно вимірні системи ортогональних функцій, що мають певні особливі властивості.

Прикладом системи таких функцій є система вигляду

$$\Phi_1^c(r,N,t),\ \Psi_1^s(r,N,t),\ \ldots,\ \Phi_n^c(r,N,t),\ \Psi_n^s(r,N,t), \tag{2}$$
$$N = 2n + 1.$$

Можна переконатися, що функції, з яких складається дана система, є ортогональними на відрізку $[0,2\pi]$, тобто задовольняє умови:

$$\int_0^{2\pi}\Phi_k^c(r,N,t)\Phi_j^c(r,N,t)dt=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ \dfrac{\pi}{a_k^0(2r+1,N)}, & j=k;\end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi}\Psi_k^s(r,N,t)\Psi_j^s(r,N,t)dt=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ \dfrac{\pi}{a_k^0(2r+1,N)}, & j=k;\end{cases} \tag{3}$$
$$\int_0^{2\pi}\Phi_k^c(r,N,t)\Psi_j^s(r,N,t)dt=0,\ \ \forall j,k.$$

У цьому можна переконатися, якщо враховуючи визначення функцій $\Phi_k^c(r,N,t)$, $\Psi_j^s(r,N,t)$ та виконуючи множення, змінюючи інтеграл суми сумою інтегралів, а також виносячи сталий множник за знак інтеграла і зважаючи на співвідношення ортогональності для тригонометричних функцій, дістаємо умови (2).

Узагальнені коефіцієнти Фур'є функції $f(t)\in\Theta$ за системою функцій (1) обчислюються за формулами

$$A_k=\frac{\varphi_k^0(2r+1,N)}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\Phi_k^c(r,N,t)dt,$$

$$B_k=\frac{\varphi_k^0(2r+1,N)}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\Psi_k^s(r,N,t)dt,\ \ k=1,2,\ldots,n.$$

Із урахуванням визначень функцій $\Phi_k^c(r,N,t)$ і $\Psi_j^s(r,N,t)$, вирази для A_k і B_k можна подати у вигляді

$$A_k=\varphi_k^0(2r+1,N)\left\{\frac{a_k}{r^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{a_{mN+k}}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{a_{mN-k}}{(mN-k)^{r+1}}\right]\right\}.$$

$$B_k=\varphi_k^0(2r+1,N)\left\{\frac{b_k}{r^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{b_{mN+k}}{(mN+k)^{r+1}}+\frac{b_{mN-k}}{(mN-k)^{r+1}}\right]\right\}.$$

де

$$a_j=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos jt\,dt,\ \ b_j=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin jt\,dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f(t)\in\Theta$ за тригонометричним базисом (1).

Відповідно до зазначених умов многочлен найкращого середньоквадратичного наближення $T_k(t)$ за системою функцій (2), степінь якого не вищий n, набирає вигляду:

$$T_k(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{k}\left[A_j\Phi_j^c(r,N,t)+B_j\Psi_j^s(r,N,t)\right],$$

а нерівність Бесселя можна подати так:

$$\rho^2(T_n,f)=\|f\|_{L_2}^2-\sum_{j=1}^{n}\left(A_j^2+B_j^2\right)\left[\frac{\pi}{\varphi_j^0(2r+1,N)}\right],$$

і визначає мінімальну похибку середньоквадратичного наближення функції f, яку можна забезпечити за допомогою многочлена $T_k(t)$ за цією системою функцій, степінь якого не перевищує n. Важливим є той факт, що $\rho^2(T_n,f)\to 0$ з ростом n, і може бути як завгодно малим.

Дискретний підхід до побудови апроксимаційних моделей сигналів використовують у разі, коли застосовні функції зображено складним аналітичним виразом, або їх аналітичний опис взагалі невідомий. У цих випадках досліджувані функції подаються послідовністю своїх значень у вузлах рівномірної сітки, заданої на відрізку розгляду функції.

Такий підхід важливий на етапі оброблення і передавання сигналу, що проходить через канал зв'язку, зазнаючи впливу завад. Для виокремлення шуму з корисної інформації використовують сплайн-фільтри, що дають змогу відфільтрувати сигнал із малою середньоквадратичною похибкою [3].

На цьому етапі доцільно використовувати фундаментальні апроксимаційні тригонометричні сплайни [5].

Задамо на $[a,b]$ функцію $f(t)$ і сітку $\Delta N=\{t_i\}_{(i=0)}^{N}$, $(m<N)$, та деяку чебишевську систему лінійно-незалежних функцій $\varphi_0(t),\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)$.

Потрібно відшукати узагальнений многочлен вигляду

$$\Phi_m(t)=c_0\varphi_0(t)+c_1\varphi_1(t)+\dots+c_m\varphi_m(t),$$

щоб величина

$$E_N(f,\Phi)=\sum_{i=0}^{N}\left[f(t_i)-\Phi_{\mathrm{m}}(t_i)\right]^2$$

набула найменшого значення.

Многочлен $\Phi_m(t)$, на якому досягається найменше значення, називають *многочленом найкращого середньоквадратичного наближення на сітці* Δ_N.

Детальну побудову таких многочленів наведено в [5]. Потрібно зазначити аналітичність многочлена порядку m найкращого середньоквадратичного наближення, побудованого за значеннями функції на дискретній множині рівновіддалених точок. Тому даний многочлен не використовують для наближення функцій із невеликою гладкістю. Для такого наближення доцільно використовувати тригонометричні сплайни, значення яких у вузлах сітки збігаються зі значеннями тригонометричного многочлена порядку m найкращого середньоквадратичного наближення, побудованого за значеннями функції на дискретній множині рівновіддалених точок, що має вигляд

$$Ts_n^*(x)=\sum_{j=1}^{N}f_j\left\{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{m}g_j^{-1}(r,N)\left[C_j(r,x)\cos jx_k+S_j(r,x)\sin jx_k\right]\right\},$$

де

$$C_j(r,x)=\frac{\cos jx}{j^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(mN+j)x}{\left[(mN+j)^{r+1}\right]}+\frac{\cos(mN-j)x}{\left[(mN-j)^{r+1}\right]}\right];$$

$$S_j(r,x)=\frac{\sin jx}{j^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(mN+j)x}{\left[(mN+j)^{r+1}\right]}+\frac{\sin(mN-j)x}{\left[(mN-j)^{r+1}\right]}\right];$$

$$g_j(r,x)=\frac{1}{j^{r+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\left[(mN+j)^{r+1}\right]}+\frac{1}{\left[(mN-j)^{r+1}\right]}\right].$$

а також можна подати рівністю

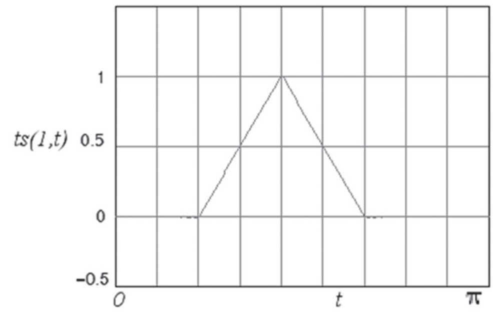
$$TS_{n,r}^*(x)=\sum_{j=1}^{N}f_j ts_{j,m}^*(r,x), \tag{4}$$

де

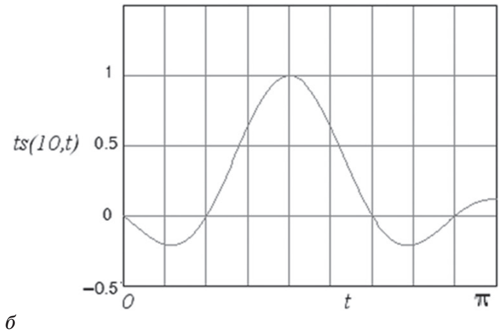
$$ts_{j,m}^*(r,x)=\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}g_j^{-1}(r,N)\left[C_j(r,x)\cos jx_k+S_j(r,x)\sin jx_k\right].$$

Означення. Тригонометричні сплайни $ts^*_{j,m}(r,x)$ називають апроксимаційними фундаментальними тригонометричними сплайнами.

Графіки деяких фундаментальних тригонометричних сплайнів за різних значеннях параметра r наведено на рис. 1.



а



б

Рис. 1. Графік фундаментального тригонометричного сплайна на сітці $\Delta_N = \{t_j\}_{j=1}^{N}$ при $r = 1$ (*а*), $r = 10$ (*б*), $N = 9$

Потрібно зауважити, що апроксимаційні фундаментальні тригонометричні сплайни (4) мають неперервну похідну $r-1$ порядку при всіх $j, j = 1,2,\ldots,m$.

Характеристикою сплайнів найкращого дискретного середньоквадратичного наближення є міра згладжування. Найпростіше міру згладжування можна визначити за формулою

$$P = 1 - \frac{m}{n},$$

де при $m = n$ міра згладжування буде нульовою, маємо інтерполяцію; при $m = 0$ міра згладжування буде найбільшою, і функція наближається до сталої, знайденої за методом найменших квадратів [5].

Висновки

♦ Досліджено питання побудови тригонометричних сплайнів, які доцільно використовувати як періодичні моделі вимірювальних сигналів у теорії інформаційно-вимірювальних систем (ІВС), таких як лінійні підсилювачі та фільтри. Цю доцільність легко пояснити тим, що тригонометричні функції, використовувані під час побудови періодичних моделей, є власними функціями лінійних операторів, тобто з точністю до сталої не змінюються у разі впливу на них лінійних операторів.

♦ Удосконалено математичну модель інформаційних сигналів на основі фундаментальних тригонометричних сплайнів, які дають можливість здійснювати оброблення сигналів у два етапи. На першому етапі виконуються розрахунки, пов'язані з обробленням фундаментальних тригонометричних сплайнів (ці обчислення можуть бути проведені попередньо), на другому етапі здійснюються обчислення, які враховують значення інформаційних сигналів. Двоетапне оброблення має низку переваг, серед яких можливість виконувати обчислення в масштабі реального часу.

♦ Запропоновано теорію і методи тригонометричної сплайн-апроксимації, що дозволяють більш ефективно розв'язувати різні завдання в телекомунікаціях для підвищення показників якості телекомунікаційних систем.

Список використаної літератури

1. **Стрелковская И. В.** *Экстремальные свойства многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе сплайн-интерполяции // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2009. 2/6 (38). С. 26–28.*

2. **Поповский В. В.** *Сравнительные методы аппроксимации в результатах рекурсивной оценки состояния сетевых элементов и их режимов // Телекоммуникационные системы и технологии: Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития. 2008. Т. 2. С. 15–16.*

3. **Denysiuk V., Negodenko E.** *Mathematical models on the basis of fundamental trigonometric splines // Science and Education a New Dimension. 2018. VI(18). Issue: 158. P. 14–18 (Natural and Technical Sciences).*

4. **Alexandru Mihai Bica, Constantin Popescu.** *Fuzzy spline interpolation with optimal property in parametric form // Information Sciences. 2013. Vol. 236. P. 138–155.*

5. **Денисюк В. П.** *Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни: монографія. Київ: ПАТ «Віпол», 2015. 296 с.*

В. В. Онищенко, Е. В. Негоденко, О. А. Золотухина

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СПЛАЙН-МОДЕЛИ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены модели информационных сигналов на основе аппроксимационных фундаментальных тригонометрических сплайнов, применяемые при решении различных задач теории и практики в телекоммуникациях. Показаны математические подходы и требования для построения данных моделей. Приведена целесообразность применения аппроксимационных моделей в случае, когда значение сигнала при дискретизации измеряется с малыми погрешностями, но сам сигнал представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала и случайной помехи.

Ключевые слова: сигналы; аппроксимационные модели; фундаментальные тригонометрические сплайны; преобразования Фурье.

V. Onyshchenko, E. Negodenko, O. Zolotukhina

APPROXIMATION SPLIN MODELS TO IMPROVE TELECOMMUNICATION SYSTEM EFFICIENCY INDICATORS

On the basis of the scientific literature analysis, it has been determined that there are properties of signals, without which the setting of many tasks of signal processing itself makes no sense. Such properties of information signals are their properties of smoothness, which characterize the behavior of the signal in some neighborhood of an arbitrary point, which belongs to the interval of the signal. These properties contain information about the existence of a certain number of continuous derivatives of the investigated signal, as well as information on some of the analytical properties of these derivatives. On the basis of this theory, a mathematical model of information signals based on fundamental trigonometric splines is developed and substantiated, which allows taking into account the differential properties of information signals.

In the study of various kind of errors in linear units in the theory of information-measuring systems, such as linear amplifiers and filters, it is advisable to use periodic models of information signals. This necessity is explained by the fact that the trigonometric functions used in the construction of periodic models are the eigenfunctions of linear operators, as such they do not change with the accuracy to the constant under the action of linear operators on them. Thus, it is proved that in the role of mathematical models of information signals it is efficient to use trigonometric splines, and for the restoration of signals as components of filters, it is efficient to apply fundamental approximation trigonometric splines. The importance of such an approach is due to the fact that when linear methods are used, processing can be applied only to fundamental functions. This fact allows us to carry out the necessary calculations for the processing of experimental data in two stages. In the first stage, calculations related to the processing of fundamental functions are carried out (these calculations can be carried out in advance), in the second stage, calculations that take into account the value of the reproduced functions are performed.

Keywords: signals; transformations of Fourier; approximate models, fundamental trigonometric splines.