

УДК 004.414.2

DOI: 10.31673/2412-9070.2021.033538

Н. Д. ЯКОВЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доцент;  
К. П. СТОРЧАК, доктор техн. наук, професор;  
О. С. ЗВЕНІГОРОДСЬКИЙ, канд. техн. наук, доцент;  
Ю. О. БЕЛКІН, магістр;  
О. В. КІТУРА, аспірант,  
Державний університет телекомунікацій, Київ

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗВ'ЯЗАНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ МЕТОДИКИ

У процесі дослідження функціонування інформаційних систем за допомогою математичного моделювання можуть виникати задачі, які розв'язуються за допомогою скінченно-елементної методики. Як приклад розглянуто осесиметричну динамічну задачу про зв'язані явища, що з'являються під час мікромасштабного імпульсного навантаження. На етапі розв'язування задачі використано чисельний метод покрокового неявного інтегрування за часом та ітераційний метод. Надано кількісні оцінки динамічних та температурних ефектів термоструктурно-механічної зв'язаності.

**Ключові слова:** математичне моделювання; скінченно-елементна методика; ітераційний метод; імпульсне навантаження.

### ВСТУП

Процес дослідження функціонування будь-якої інформаційної системи математичними методами, зокрема за допомогою ЕОМ, супроводжується побудовою математичної моделі. Під математичним моделюванням розуміють встановлення відповідності наявному реальному об'єкту або процесу, що відбувається в ньому, деякого математичного досліджуваного об'єкта [1]. Для математичного моделювання характерне те, що для опису функціонування складових системи використовують алгебраїчні, інтегродиференціальні та інші функціональні співвідношення.

Дослідження математичної моделі здійснюється за допомогою аналітичних та чисельних методів. Під час розв'язування крайових задач досить непросто використовувати складні аналітичні методи, тому широко застосовують чисельні методи: метод скінченних різниць, варіаційний метод, метод скінченних елементів тощо. Порівняно з аналітичними методами чисельні методи дають змогу досліджувати досить широкий клас модельованих систем.

Можна виокремити важливі напрямки практичного застосування моделей на прикладі моделювання імпульсного навантаження задля підвищення міцності та мікро- і нанодіагностики.

Поштовхом для дослідження динамічних явищ з імпульсним термічним навантаженням стало розроблення і запровадження короткоімпульсних надпотужних лазерів. Ці пристрої забезпечують швидкість зростання температури опроміненої поверхні майже  $10^{10} \dots 10^{15} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{с}$ , і згідно з оцінками, які зробили Стернберг і Чакраворті [2], динамічна складова напружень при цьому є істотною.

Аналіз термоструктурно-механічних зв'язаних процесів потребує розвинення нелінійних математичних моделей, постановок крайових задач і методик їх чисельної реалізації. Аналіз літературних джерел показує, що до цього часу такі моделі розвинуто недостатньо. Майже відсутні роботи, в яких досліджуються зв'язані динамічні процеси, що виникають під дією імпульсів тривалістю  $10^{-8} \dots 10^{-7} \text{ с}$ .

У статті досліджуються динамічні ефекти термоструктурно-механічної зв'язаності, зумовлені об'ємними термопружними ефектами та дисипацією механічної енергії, а також прихованими теплотами.

**Мета дослідження.** Метою дослідження є аналіз ефектів термоструктурно-механічної зв'язаності під час мікромасштабного імпульсного навантаження за допомогою чисельної методики.

### ОСНОВНА ЧАСТИНА

#### Постановка задачі

Математична постановка осесиметричної задачі в циліндричній системі координат передбачає використання кінематичних співвідношень Коші, рівнянь руху, а також початкових та граничних умов [3]. Нелінійна поведінка матеріалу описується рівняннями узагальненої моделі течії [4].

Для дослідження рівня температурних ефектів зв'язаності та їх впливів на термомеханічний процес далі розглянемо динамічну задачу про термічне збурення імпульсом теплового потоку.

Для порівняльного аналізу візьмемо такі випадки:

- 1) термоструктурно-механічна зв'язаність відсутня ( $\hat{\alpha} = 0; \chi = 0; \beta = 0$ );
- 2) має місце лише термопружний механізм зв'язаності ( $\hat{\alpha} \neq 0; \chi = 0; \beta = 0$ );
- 3) має місце лише ефект внутрішньої дисипації ( $\hat{\alpha} = 0; \chi = 0,8; \beta = 0$ );
- 4) діють перші два механізми зв'язаності ( $\hat{\alpha} \neq 0; \chi = 0,8; \beta = 0$ );
- 5) діють всі механізми зв'язаності ( $\hat{\alpha} \neq 0; \chi = 0,8; \beta = 1$ ).

© Н. Д. Яковенко, К. П. Сторчак, О. С. Звенігородський, Ю. О. Белкін, О. В. Кітура, 2021

Тут  $\hat{\alpha}$  — узагальнений коефіцієнт об’ємного розширення;  $\beta$  — індикативний параметр, який набуває значень 0 або 1; параметр  $\chi = 0,8$ .

### Методика розв’язування

Задача розв’язується чисельно з використанням неявних часових схем з автоматичним вибором кроку, ітераційного методу та методу скінченних елементів для розв’язування лінеаризованої крайової задачі на кожній ітерації.

Варіаційне Лагранжеве формулювання задачі термомеханіки має вигляд

$$\delta\Phi = \int_F (\sigma_{rr} \delta\varepsilon_{rr} + \sigma_{zz} \delta\varepsilon_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi} \delta\varepsilon_{\varphi\varphi} + 2\sigma_{rz} \delta\varepsilon_{rz} + \rho \ddot{u}_r \delta u_r + \rho \ddot{u}_z \delta u_z) dF - \int_S (t_{nr} \delta u_r + t_{nz} \delta u_z) dS = 0,$$

$$\delta I = \int_F \left[ k \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) + c_V \dot{\theta} \delta \theta \right] dF - \int_S q \delta \theta dS = 0,$$

де  $\delta I$  — варіація функціонала для задачі теплопровідності;  $\delta\Phi$  — варіація функціонала для задачі руху;  $t_{nr}$  і  $t_{nz}$  — компоненти вектора зовнішніх навантажень  $t$  на контурі  $S$  із зовнішньою нормаллю  $t_{ni} = \sigma_{ij} n_j$ ;  $\sigma_{zz}$ ,  $u_z$  — відповідно радіальна і осьова компоненти вектора переміщень;  $q$  — тепловий потік. Інтегрування проводиться за площею меридіонального перерізу  $F$  та його контуру  $S$ .

З умови стаціонарності функціонала  $\delta\Phi = 0$  дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_{km}} = \sum_{p=1}^K \frac{\partial \Phi_p}{\partial u_{km}} = 0, \quad m = 1 \div N,$$

де  $k = r, z$ ;  $N$  — кількість вузлів;  $K$  — кількість чотирикутників у меридіональному перерізі (кільцевих елементів).

З умови стаціонарності функціонала  $\delta I = 0$  дістаємо систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку за часом для визначення вузлових значень температури  $\theta_i$ .

Під час розв’язання зовнішнього ітераційного процесу використання методу скінченних елементів приводить до векторної лінеаризованої задачі динаміки у вигляді

$$\mathbf{K}\bar{u} + \mathbf{M}\ddot{\bar{u}} = \bar{f}, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_1, \quad \dot{\bar{u}}(0) = \bar{v}_1,$$

де  $\mathbf{K}$  і  $\mathbf{M}$  — матриця відповідно жорсткості й мас;  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{u}_1, \bar{v}_1$  — вектор відповідно вузлових переміщень і швидкостей, зовнішніх сил, початкових переміщень і швидкостей.

Для інтегрування рівнянь руху за часом використовується метод Ньюмарка. При цьому другі похідні за часом у рівняннях руху для моменту часу  $t_{i+1}$  подаються формулами Ньюмарка [5]

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\zeta \Delta t} (\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) - \frac{1-\zeta}{\zeta} \ddot{u}_i,$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{1}{\zeta \Delta t} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1-\zeta}{\zeta} \dot{u}_i,$$

де  $\Delta t$  — крок за часом;  $\zeta$  — параметр схеми,  $0 \leq \zeta \leq 1$ .

У внутрішній та зовнішній ітераційних схемах у разі переходу від пружного до непружного процесів збіжність достатньо повільна. Для її прискорення використовується алгоритм Стефенса – Ейткена. Даний алгоритм полягає в такому. На  $k$ -му кроці простої ітерації по непружній деформації  $\varepsilon_{ij}^{p[k]}$  і зміцненню  $K^{[k-1]}$  з попереднього кроку відшукуються напруження  $\sigma_{ij}^{[k]}$  і повна деформація  $\varepsilon_{ij}^{[k]}$ . Тут і далі верхніми індексами в квадратних дужках позначено номер ітерації. На кроці  $k = 2n+1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  обчислюється ітераційний параметр

$$\alpha_{it} = \frac{(s_{im}^{[k]} - s_{im}^{[k-1]})}{(s_{im}^{[k-2]} - 2s_{im}^{[k-1]} + s_{im}^{[k]})}, \quad s_{im}^{[k]} = \max_V s_i^{[k]},$$

де  $s_i$  — інтенсивність напружень.

Покращене  $k$ -те наближення  $(\hat{\sigma}_{ij}^{[k]}, \hat{\varepsilon}_{ij}^{p[k]}, \hat{K}^{r[k]})$  визначається за формулами

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{ij}^{[k]} \\ \hat{\varepsilon}_{ij}^{p[k]} \\ \hat{K}^{r[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{[k]} \\ \varepsilon_{ij}^{p[k]} \\ K^{r[k]} \end{bmatrix} (1 - \alpha_{it}) + \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{[k-1]} \\ \varepsilon_{ij}^{p[k-1]} \\ K^{r[k-1]} \end{bmatrix} \alpha_{it}.$$

Близькість розв'язків характеризується величинами  $\delta s_{im}^{[k]} = \frac{|s_{im}^{[k-1]} - s_{im}^{[k]}|}{s_{im}^{[k]}}$ .

Покращене початкове наближення розраховується за значеннями трьох попередніх кроків за часом. Під час монотонної збіжності  $\alpha_{in} < 0$  або  $\alpha_{in} > 1$ . У цьому разі  $\alpha_{in}$  береться таким, що дорівнює нулю, тобто використовується стандартна схема простої ітерації.

### Результати дослідження

Розрахунки здійснювалися для стержня радіусом  $R = 5 \cdot 10^{-6}$  м та довжиною  $L = 2 \cdot 10^{-3}$  м (рис. 1). SE-сітка, за якої досягнуто практичну збіжність, містить 85 прямокутників і 428 вузлів. У процесі обчислень було взято параметр теплового навантаження  $q_0 = 2 \cdot 10^8$  кВт/м<sup>2</sup> і час дії теплового потоку  $t_q = 10^{-8}$  с.

Зміну за часом температури на поверхні півпростору для випадків 1, 2, 3 і 4 (цифри на кривих) показано на рис. 2. Штрихова лінія відповідає зміні напруження  $\sigma_{zz}$  в імпульсі на поверхні. Максимальні підвищення температури становлять 23°, 11° і 11°C для задач відповідно 2, 3, 4.

Розподіл інтенсивності непружних деформацій і напружень  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$  для всіх чотирьох задач для одного моменту часу зображено на рис. 3.

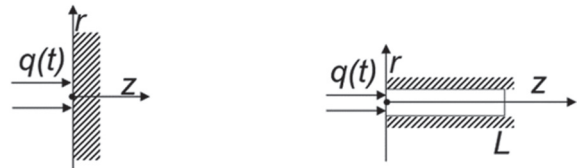


Рис. 1

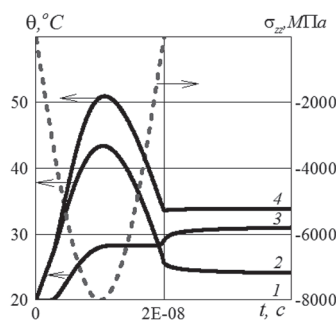


Рис. 2

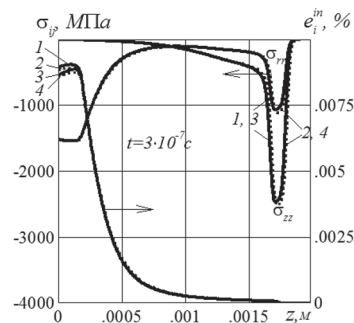


Рис. 3

Термомеханічна зв'язаність практично не змінює розподіли залишкових напружень. Її вплив на інтенсивність непружних деформацій незначний і не перевищує 3%.

### Висновки

Загалом у розглядуваних динамічних задачах із короткоімпульсним лазерним опроміненням температурними ефектами зв'язаності можна нехтувати. Але в разі підвищення швидкостей термічного навантаження швидкості деформування і внутрішньої дисипації збільшуються, тому в цих випадках можна очікувати більш істотних температурних ефектів зв'язаності.

### Список використаної літератури

1. Чернихівський Є. М. Математичне моделювання телекомунікаційних систем та мереж: навч. посіб. Львів: вид-во Львівської політехніки, 2011. 280 с.
2. Sternberg E., Chakravorty J. G. On inertial effects in a transient thermoelastic problem // ASME. J. Appl. Mech. 1959. V. 26, N 4. P. 503–509.
3. Яковенко Н. Д., Бондарчук А. П., Ковальчук О. П. Исследование динамических эффектов при микромасштабном импульсном нагружении // Проблемы управления и информатики. 2021. №4. С. 61–68.
4. Senchenkov I. K., Oksenchuk N. D. Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material // J. Math. Sci: електрон. версія журн. 2013. V. 190, N 6. P. 796–803. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
5. Smith I. M., Griffiths D. V. Programming the Finite Element Method / Chichester, 4th edition. New York: John Wiley and Sons, 2004. 542 p.

Н. Д. Яковенко, К. П. Сторчак, А. С. Звенигородский, Ю. О. Белкин, А. С. Китуря  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВЯЗАННЫХ ЭФФЕКТОВ  
НА ОСНОВАНИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МЕТОДИКИ**

*В процессе исследования функционирования информационных систем с помощью математического моделирования могут возникать задачи, которые решаются с помощью конечно-элементной методики. Для примера рассмотрена осесимметричная задача о связанных процессах, которые возникают при микромасштабном импульсном нагружении. Для решения задачи был применен численный метод пошагового неявного интегрирования по времени, а также итерационный метод. Представлены количественные оценки динамических и температурных эффектов термоструктурно-механической связанности.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование; конечно-элементная методика; итерационный метод; импульсное нагружение.

N. D. Yakovenko, K. P. Storchak, O. S. Zvenigorodsky, Y. O. Belkin, O. S. Kitura  
**MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC RELATED PROCESSES  
BASED ON THE FINITE ELEMENT TECHNIQUES**

*In the process of investigation the functioning of information systems with the help of mathematical modeling, problems can arise that are solved using finite element techniques. For example, In the present work we solved the axially symmetric dynamic problem of related phenomena under microscale thermal loading. The statement of the problem includes: Cauchy relations, equations of motion, heat conduction equation, initial conditions, thermal and mechanical boundary conditions. The nonlinear behavior of a material is described by the unified model of flow. The problem is solved numerically by the time step integration method, iterative method and finite element method. Equations of the evolution for the inelastic flow model are integrated by the second-order Euler implicit method with the use of the rule of «middle point». The system of nonlinear transcendental equations obtained in each time step is solved by the method of simple iteration. To accelerate convergence, we apply the Stephensen – Aitken procedure. The equations of motion are integrated by the Newmark method, whereas the heat-conduction equation is integrated by the first-order implicit method.*

*The problem of heat-conduction is linearized by finding the temperature-dependent thermal characteristics according to the temperature distribution in the previous time step or previous iteration.*

*The main results obtained in the work are the following: quantitative estimations of temperature effects of thermostructural-mechanical coupling, which are caused by volumetric thermoelastic effect, dissipation of mechanical energy and hidden heat are obtained.*

**Keywords:** mathematical modeling; finite element method; iterative method; pulse loading.

