

УДК 534.21:537.226.86

DOI: 10.31673/2412-9070.2023.046070

В. В. ЛЕВЧЕНКО, канд. фіз.-мат. наук;

А. В. ВАРШАМОВ, ст. викладач,

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ

ВЛАСНІ ЧАСТОТИ І ФОРМИ ПРУЖНОЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КІЛЬЦЕВИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН

Розглянуто використання тонких п'єзоелектричних пластинчастих перетворювачів із товщиною поляризацією у радіоелектронних пристроях різного функціонального призначення. У дискових та кільцевих вібраторах із суцільними електродами на лицьових площинах збуджуються осесиметричні коливання. Якщо ж електроди кільцевої пластини мають тільки діаметральні розрізи й електропружні сектори збуджуються протифазно, то в ній виникають неосесиметричні коливання за окружною координатою. Форми цих коливань за цією координатою апіорі визначаються кількістю діаметральних розрізів електродів.

Ключові слова: кільцева п'єзокерамічна пластинка; порівняльний аналіз власних частот і форм пружноелектричних осесиметричних коливань.

Вступ

Тонкі п'єзоелектричні пластинчасті елементи із товщиною поляризацією знаходять широке практичне застосування в різних радіотехнічних пристроях [1; 3; 5; 7; 8]. У дискових і кільцевих вібраторах із суцільними електродами на лицьових площинах генеруються осесиметричні коливання [6; 7; 9], послідовні теоретичні розвідки частотного спектра і форм коливань яких недостатньо вивчено. Далі у статті розглядатимуться систематичні дослідження власних частот і форм пружноелектричних коливань кільцевих п'єзокерамічних пластин за різних граничних умов.

Основна частина

Постановка задачі. Основні рівняння. Тонку п'єзокерамічну пластину завтовшки h віднесемо до циліндричної системи координат $o r \theta z$, координатна площина $z = 0$ якої збігається із серединною площиною пластини. Під час осесиметричних коливань пластини з товщиною поляризацією використаємо [2; 6; 7] такі матеріальні співвідношення:

$$\begin{aligned} \epsilon_r = s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z; \quad \epsilon_\theta = s_{21}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\theta + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z; \quad \epsilon_z = s_{31}^E (\sigma_r + \sigma_\theta) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z; \\ D_z = d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \epsilon_{33}^T E_z; \quad \gamma_{rz} = s_{44}^E \sigma_{rz} + d_{13} E_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо тонка п'єзокерамічна пластинка з електродованими лицьовими площинами $z = \pm h/2$ перебуває в умовах плоского напруженого стану, то, взявши гіпотези $u_r = u_r(r, t)$, $u_\theta = 0$, $\sigma_{rz} = \sigma_z = 0$, $E_z = E_z(r, t)$ із співвідношень (1), дістанемо вирази:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right); \quad \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right); \\ D_z = d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \epsilon_{33}^T E_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут використано формули для деформацій у циліндричних координатах і аналог коефіцієнта Пуассона $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$.

Якщо в рівняння коливань

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

підставити формули (2), то воно набере вигляду

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де a — швидкість хвилі у пластині, $a = 1 / \sqrt{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \rho$.

Для кільцевої пластини $r_0 < r < r_1$ із гармонічними коливаннями $f(r, t) = \text{Re } f^a(r) \exp i \omega t$ розв'язок рівняння (3) виражається через циліндричні функції Бесселя першого і другого роду першого порядку [4]:

$$u_r^a(r) = A R J_1(k_E r) + B Y_1(k_E r), \quad (4)$$

де $k_E^2 = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega^2$; A і B — безрозмірні сталі інтегрування.

Скориставшись (2) і (4), дістанемо такі вирази для напружень:

$$\sigma_r^a = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} (Aa_1(k_E r) + Bb_1(k_E r) - (1+\nu_E)d_{33}E_z^a); \quad \sigma_\phi^a = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} (Aa_2(k_E r) + Bb_2(k_E r) - (1+\nu_E)d_{13}E_z^a), \quad (5)$$

в яких E_z^a — амплітуда напруженості електричного поля $E_z = \operatorname{Re} E_z^a \exp i\omega t$.

У формулах (5) було застосовано такі позначення:

$$a_1(k_E r) = k_E R J_0(k_E r) - (1+\nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r); \quad b_1(k_E r) = k_E R Y_0(k_E r) - (1+\nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r);$$

$$a_2(k_E r) = \nu_E k_E R J_0(k_E r) + (1+\nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r); \quad b_2(k_E r) = \nu_E k_E R Y_0(k_E r) + (1+\nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r). \quad (6)$$

П'єзоелектричні коливання вивчалися з можливими типами граничних умов. За граничних умов

$$\sigma_r(r_0, t) = 0; \quad \sigma_r(r_1, t) = 0 \quad (7)$$

система алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A, B у розв'язку (4) набере такого вигляду:

$$Aa_1(k_E r_0) + Bb_1(k_E r_0) = (1+\nu_E)d_{13}E_z^a, \quad Aa_1(k_E r_1) + Bb_1(k_E r_1) = (1+\nu_E)d_{13}E_z^a. \quad (8)$$

Власні частоти можна дістати з рівняння

$$a_1(k_E r_0)b_1(k_E r_0) - a_1(k_E r_1)b_1(k_E r_1) = 0, \quad (9)$$

а відповідні власні форми — із системи (8) при $E_z^a = 0$.

Виконавши низку перетворень, здобудемо асимптотичний вираз

$$\frac{2k_E R^2}{\pi\sqrt{r_0 r_1}} \sin k_E(r_1 - r_0) \approx 0 \quad (10)$$

частотного рівняння (9) і асимптотичну формулу

$$k_E r = \frac{(n-1)\pi R}{r_1 - r_0}; \quad n \gg 1 \quad (11)$$

для власних частот вільних коливань. Частотний спектр (11) відповідає коливанням за радіальними формами, коли на ширині кільця $r_1 - r_0$ вкладається ціле (парне) число чверті хвилі.

У разі внутрішнього жорстко закріпленого і зовнішнього вільного краях кільця

$$u_r(r_0, t) = 0; \quad \sigma_r(r_0, t) = 0 \quad (12)$$

систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A, B у розв'язку (4) можна подати у вигляді

$$AJ_1(k_E r_0) + BY_1(k_E r_0) = 0; \quad Aa_1(k_E r_1) + Bb_1(k_E r_1) = (1+\nu_E)d_{13}E_z^a. \quad (13)$$

Власні частоти визначаються з умови

$$J_1(k_E r_0)b_1(k_E r_1) - Y_1(k_E r_0)a_1(k_E r_1) = 0, \quad (14)$$

а відповідні власні форми із системи (13) при $E_z^a = 0$. Аналогічно попередньому дістанемо асимптотичний вираз

$$\frac{2R^2}{\pi\sqrt{r_0 r_1}} \cos k_E(r_1 - r_0) \approx 0 \quad (15)$$

частотного рівняння (14) і асимптотичну формулу

$$k_E r = \frac{R(n-1)\pi/2}{r_1 - r_0}; \quad n \gg 1 \quad (16)$$

для власних частот вільних коливань. Частотний спектр (16) відповідає коливанням за радіальними формами, коли на ширині кільця $r_1 - r_0$ вкладається непарне число чвертей хвилі (чвертьхвильові коливання).

У разі вільного внутрішнього краю і закріпленого зовнішнього краю кільця

$$\sigma_r(r_0, t) = 0; \quad u_r(r_0, t) = 0 \quad (17)$$

система алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A, B у розв'язку (4) така:

$$Aa_1(k_E r_0) + Bb_1(k_E r_0) = (1+\nu_E)d_{13}E_z^a, \quad AJ_1(k_E r_1) + BY_1(k_E r_1) = 0. \quad (18)$$

Власні частоти обчислюватимуться з умови

$$a_1(k_E r_0)Y_1(k_E r_1) - b_1(k_E r_0)J_1(k_E r_1) = 0, \quad (19)$$

а відповідні власні форми — із системи (18) при $E_z^a = 0$. Перетворення дають змогу дістати асимптотичний вираз

$$\frac{2R}{\pi\sqrt{r_0 r_1}} \cos k_E(r_1 - r_0) \approx 0 \quad (20)$$

частотного рівняння (19) і асимптотичну формулу

$$k_E r = \frac{R(2n-1)\pi/2}{r_1 - r_0}; \quad n \gg 1 \tag{21}$$

для власних частот вільних коливань. Частотний спектр (21) відповідає коливанням за радіальними формами, коли на ширині кільця $r_1 - r_0$ вкладається непарне число чвертей хвиль (чвертьхвильові коливання).

Зауважимо, що асимптотичні значення власних частот коливань за граничних умов (12) і (17), як це випливає з формул (16) і (21), збігаються.

При обох жорстко закріплених краях

$$u_r(r_0, t) = 0; \quad u_r(r_1, t) = 0 \tag{22}$$

система алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A, B у розв'язку (4) така:

$$AJ_1(k_E r_0) + BY_1(k_E r_0) = 0; \quad AJ_1(k_E r_1) + BY_1(k_E r_1) = 0. \tag{23}$$

З (23) випливає, що вимушені коливання в цьому разі електричним потенціалом не збуджуються, а частоти вільних (власних) коливань обчислюються з частотного рівняння

$$J_1(k_E r_0)Y_1(k_E r_1) - Y_1(k_E r_0)J_1(k_E r_1) = 0. \tag{24}$$

У разі високих частот для частотного рівняння (24) дістаємо асимптотичний вираз

$$\frac{2}{\pi k_E \sqrt{r_0 r_1}} \sin k_E (r_1 - r_0) \approx 0. \tag{25}$$

Це означає, що зі збільшенням частот вільних коливань їх можна визначити за асимптотичною формулою

$$k_E r = \frac{\pi n R}{r_1 - r_0}; \quad n \gg 1. \tag{26}$$

Частотний спектр (26) відповідає коливанням за радіальними формами, коли на ширині кільця $r_1 - r_0$ вкладається ціле число півхвиль (півхвильові коливання).

Аналіз результатів. Результати розрахунків безрозмірних власних частот $k_E r = \bar{\omega}$ (у наведених далі таблицях риска над $\bar{\omega}$ відсутня) для кільцевих п'езокерамічних пластин $r_0 < r < r_1 = R$ із властивостями $\rho = 7740 \text{ кг/м}^3$, $s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$, $s_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$, $d_{31} = -125,10^{-12} \text{ Кл/Н}$, що відповідає п'езокераміці ЦТС-19 [2; 7], за різних умов закріплення і відношенні радіусів $r_0/\eta = 0,4$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Власні частоти коливань за різних граничних умов

Номер частоти n	Граничні умови			
	(7)	(12)	(17)	(22)
1	1,42357	2,76583	3,20884	5,39118
	-	2,61799	2,61799	5,23599
2	5,49151	7,93913	8,04387	10,55773
	5,23599	7,853982	7,853982	10,47198
3	10,59329	13,14434	13,20123	15,76646
	10,47198	13,08997	13,08997	15,70796
4	15,78762	18,36553	18,40479	20,9882
	15,70796	18,32596	18,32596	20,94395
5	21,00334	23,59297	23,62303	26,21548
	20,94395	23,56195	23,59195	26,17994
6	26,22731	28,82342	28,84782	31,44561
	26,17994	28,79793	28,79793	31,41593

Також у табл. 1 для кожної власної частоти зазначено точні (над рискою) і асимптотичні (під рискою) значення. З таблиці випливає, що кільцева пластина із закріпленою зовнішньою границею (умови (17)) є більш жорсткою механічною системою, ніж кільцева пластина із закріпленою внутрішньою границею (умови (12)), хоча за граничних умов (12) і (17) власні частоти, за винятком перших двох частот, практично збігаються.

Як зазначалося раніше, електромеханічні коливання в разі жорсткого закріплення обох країв (граничні умови (22)) електричним шляхом не збуджуються.

Залежно від умов закріплення (граничних умов) перші власні частоти значно різняться — приблизно вдвічі в разі закріплення по зовнішньому контуру (умови (17)) відносно незакріплених (вільних) країв

(умови (7)), і більш ніж утричі при закріпленні по обох краях (умови (22)) відносно вільних країв (умови (7)). Як показали розрахунки, зі збільшенням номера частоти відмінність у власних частотах зменшується до 5% (для десятої частоти). Асимптотичні формули дають задовільне (з точністю, меншою за 5%) наближення вже для третіх частот.

Під час електропружних коливань поряд із резонансними частотами можуть з'являтися частоти, при яких деяка з величин дорівнює нулеві. Такі частоти прийнято називати антирезонансними частотами відповідної функції. В електропружності важливе значення мають антирезонансні частоти струму провідності [6; 7]. Для їх визначення відшукаємо амплітуду струму провідності через електродоване кільце $r_0 < r < r_1$

$$I^a = -i\omega \frac{2\pi R d_{13}}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left[A(r_1 J_1(k_E r_1) - r_0 J_1(k_E r_0)) + B(r_1 Y_1(k_E r_1) - r_0 Y_1(k_E r_0)) \right] + i\omega \pi (r_1^2 - r_0^2) h^{-1} \epsilon_{33}^T U (1 - k_p^2), \quad (27)$$

де $\pi(r_1^2 - r_0^2) h^{-1} \epsilon_{33}^T = C^T$ — діелектрична ємність пластини без п'єзоефекту; $2d_{13}^2 / (1 - \nu_E) s_{11}^E \epsilon_{33}^T = k_p^2$ — планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку [2; 6; 7]; U — різниця потенціалів на електродах при $E_z^a = -U h^{-1}$.

Перші резонансні ω_r і антирезонансні ω_{ar} частоти з різними відношеннями r_0/r_1 за умов закріплення країв (12) і (17) наведено в табл. 2 і табл. 3. Оскільки на резонансній частоті механічні величини й електричний струм досягають максимальних значень, а на антирезонансній частоті електричний струм мінімальний, то «відстань» між цими частотами характеризує ефективність електромеханічного перетворення енергії (динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (динамічний КЕМЗ)), що визначається за формулою Мезона $k_d^2 = (\bar{\omega}_{ar}^2 - \bar{\omega}_r^2) / \bar{\omega}_{ar}^2$ [2; 6; 7].

Таблиця 2

Резонансні ω_r й антирезонансні ω_{ar} частоти коливань із граничними умовами (12) і різними відношеннями r_0/r_1

r_0/r_1	0,05		0,1		0,3		0,4	
	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}
1	2,10835	2,1239	2,13785	2,16848	2,4559	2,5567	2,76583	2,91239
2	5,46004	5,4650	5,6076	5,6178	6,8687	6,9036	7,93913	7,9903
3	8,71011	8,7132	9,02116	9,0275	11,310	11,332	13,1443	13,1754
4	11,9620	11,964	12,4556	12,4602	15,774	15,793	18,3655	18,3878
5	15,2227	15,224	15,9099	16,0785	20,248	20,260	23,593	23,6103
6	18,4915	18,493	19,3676	19,3705	24,727	24,737	28,8234	28,8376

Таблиця 3

Резонансні ω_r й антирезонансні ω_{ar} частоти коливань із граничними умовами (17) і різними відношеннями r_0/r_1

r_0/r_1	0,05		0,1		0,3		0,4	
	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}	ω_r	ω_{ar}
1	3,76472	3,8290	3,5841	3,5727	3,0920	3,1531	3,2088	3,01127
2	7,0068	7,0068	6,4128	6,4303	7,0229	7,0534	8,0438	7,95108
3	10,154	10,154	9,4528	9,4326	11,387	11,387	13,2012	13,2216
4	13,291	13,291	12,710	12,7243	15,825	15,856	18,4047	18,4115
5	16,421	16,421	16,074	16,0686	20,286	20,311	23,6230	23,6469
6	19,545	19,545	19,489	19,4946	24,758	24,765	28,8478	28,8688

Слід зазначити, що за малих величин відношення радіусів $0,001 < r_0/r_1 < 0,1$ резонансні $\bar{\omega}_r$ й антирезонансні $\bar{\omega}_{ar}$ частоти зі збільшенням їх номера n практично збігаються і прямують (у разі граничних умов (12)) до аналогічних частот для суцільного диска. Зі збільшенням відношення r_0/r_1 збільшується і різниця між резонансними і антирезонансними частотами. Зростають і частоти (так, у разі граничних умов (12) і $r_0/r_1 = 0,6$ резонансна частота $\bar{\omega}_{r,1} = 3,97688$, а антирезонансна частота $\bar{\omega}_{ar,1} = 4,26596$, а під час граничних умов (17) і такій самій геометрії резонансна частота $\bar{\omega}_{r,1} = 4,22986$, а антирезонансна частота $\bar{\omega}_{ar,1} = 4,48724$). Тобто, зі збільшенням відношення r_0/r_1 зростають значення резонансних і антирезонансних частот.

Форми власних коливань для трьох перших власних частот за різних граничних умов у координатах ($U_r = u^a(r)$; $\bar{r} = r_0/r_1$) зображено на рис. 1–4. Графік власних форм для першої частоти нанесено суцільною лінією, для другої — точками, для третьої — пунктирами.

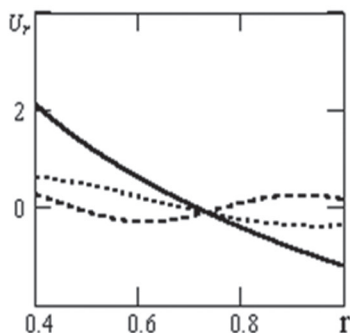


Рис. 1. Форми власних коливань для власних частот $\bar{\omega}_1 = 1,42357, \bar{\omega}_2 = 5,49151, \bar{\omega}_3 = 10,59329$ із граничними умовами (7)

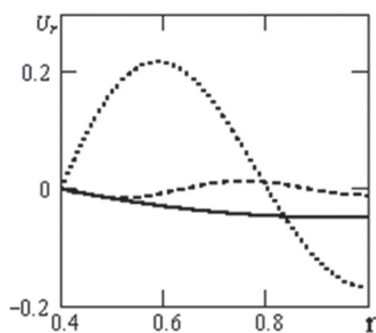


Рис. 2. Форми власних коливань для власних частот $\bar{\omega}_1 = 2,7653, \bar{\omega}_2 = 7,93913, \bar{\omega}_3 = 13,1443$ із граничними умовами (12)

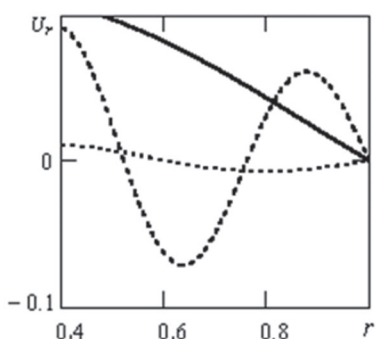


Рис. 3. Форми власних коливань для власних частот $\bar{\omega}_1 = 3,20884, \bar{\omega}_2 = 8,0438, \bar{\omega}_3 = 13,20123$ із граничними умовами (17)

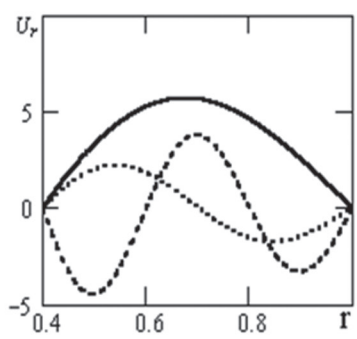


Рис. 4. Форми власних коливань для власних частот $\bar{\omega}_1 = 5,39118, \bar{\omega}_2 = 10,55773, \bar{\omega}_3 = 15,76646$ із граничними умовами (22)

Висновки

Однією з важливих характеристик форм коливань систем із розподіленими параметрами є кількість і місцезнаходження вузлових ліній. З рис. 1–4 й асимптотичних виразів для частотних рівнянь та асимптотичних формул для частот (10) і (11), (15) і (16), (20) і (21), (25) і (26) випливає, що кількість вузлів і характер форм за всіх типів граничних умов визначатиметься через просте асимптотичне наближення.

У разі граничних умов (7) на ширині кільця вкладається ціле число півхвиль (форми при $n = 1, 2, 3, 4$ мають кількість вузлів $n - 1$); за граничних умов (12) на ширині кільця вкладається непарне число чвертей хвиль (форми $n = 1, 2, 3, 4$ мають кількість вузлів $n - 1$); за граничних умов (17) на ширині кільця вкладається непарне число чвертей хвиль (форми $n = 1, 2, 3, 4$ мають кількість вузлів $n - 1$); а в разі граничних умов (22) на ширині кільця вкладається ціле число півхвиль (форми $n = 1, 2, 3, 4$ мають кількість вузлів $n - 1$). Ці висновки краще підтверджуються для власних частот і форм із більшими номерами.

Список використаної літератури

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука. 1982. 424 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / отв. ред. А. Н. Гузь. Київ: Наук. думка, 1989. 280 с.
3. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
5. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. М.: «Советская энциклопедия», 1979. 400 с.
6. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. Київ: Наук. думка, 1990. 228 с.
7. Шульга М. О. Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. Київ: Наук. думка, 2008. 272 с.
8. Шульга М. О., Левченко В. В. До теорії неосесиметричних електропружних коливань п'єзокерамічних пластин // Доп. НАН України. 2012. № 6. С. 61–68.
9. Mason W. P. Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. 1981. Vol. 70, №6. P. 1561–1566.

10. Shul'ga N. A., Bezverkhii O. I., Mekievskii O. I. Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates // *Int. Appl. Mech.* 2010. Vol. 46, №9. P. 1031–1037.

V. V. Levchenko, A. V. Varshamov

ABOUT NATURAL FREQUENCIES AND FORMS OF ELECTROELASTIC VIBRATIONS OF RING PIEZOCERAMIC PLATES

The general solution of problem non-axisymmetric electromechanical vibrations of piezoceramic ring plate is obtained. For the plates with radial cuts of electrode covering and for boundary conditions rigid clamping — free edge, free edge — rigid clamping the spectra of natural frequencies of vibrations are mode shapes for the first harmonics in the circumferential coordinate are identified are numerically determined and analyzed. The comparative analysis of natural frequencies and forms of piezoelectric vibrations of polarized on thickness ring piezoceramic plates is executed under various boundary conditions. One of the important characteristics of the forms of oscillations is the number and location of nodal lines. From the obtained results for the frequency equations and asymptotic formulas for frequencies, it follows that the number of nodes and the nature of the forms under all types of boundary conditions can be determined by the asymptotic approximation. Under different boundary conditions, an integer number of half-waves can be placed on the width of the ring (the forms $n = 1, 2, 3, 4$ at have the number of nodes $n - 1$); or an odd number of quarter waves is placed on the width of the ring (forms have the number of nodes); or an integer number of half-waves is placed on the width of the ring (forms have the number of nodes). These findings are better confirmed for natural frequencies and forms with higher numbers.

Keywords: piezoceramic ring plate; radial cuts of electrode covering; non-axisymmetric electromechanical vibrations; spectra of natural frequencies.

