УДК 681.324 **DOI: 10.31673/2412-9070.2024.033237**

О. В. БАРАБАШ[1], доктор техн. наук, професор, ORCID: 0000-0003-1715-0761,
Д. М. ОБІДІН[2], доктор техн. наук, професор, ORCID: 0000-0002-9923-9024,
І. П. САЛАНДА[3], канд. техн. наук, доцент, ORCID: 0000-0002-5697-8564,
А. В. МАКАРЧУК[1], аспірант, ORCID: 0000-0002-6422-7488,
[1] НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»
[2] НАУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»
[3] КОГПА імені Тараса Шевченка

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАБЛИЖЕННЯ ЙМОВІРНІСНОГО ПОКАЗНИКА ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІВ БЕРНШТЕЙНА ТА НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ПРЯМОГО РОЗПОВСЮДЖЕННЯ

Використання багатомашинних інформаційних систем стає все більш затребуваною складовою самих різних сфер діяльності. Збільшення кількості вирішуваних задач за допомогою інформаційних систем та збільшення їх складності робить все більш актуальним дослідження функціональної стійкості розглядуваних систем.

Під функціональною стійкістю інформаційної системи розуміють здатність цієї системи виконувати задані функції під впливом негативних впливів. На даний момент розроблено ряд показників, які дозволяють оцінити функціональну стійкість чисельно. Одним із таких показників є згортка матриці зв'язності.

Згортка матриці зв'язності попри свою повноту володіє одним дуже суттєвим недоліком: її обчислення є доволі складною процедурою. На основі цього логічним є питання про наближене обчислення даного показника. Оскільки згортку матриці зв'язності можна розглядати як функцію від ймовірності справності ліній зв'язку, то очевидною є спроба використання певних методів теорії наближень.

На даний момент методи теорії наближень є досить розвиненими. Деякі з цих методів є досить добре дослідженими, а деякі — тільки набирають популярності. До першої групи можна віднести інтерполяційні поліноми Лагранжа, поліноми Лежандра, поліноми Бернштейна, сплайни, частинні суми рядів, тощо, а до другої — моделі машинного навчання, зокрема, й нейронні сітки прямого розповсюдження, регресійні моделі та інші. Відповідно, зразу ж виникає питання про те, які із цих методів дозволяли б краще наближати згортку матриці зв'язності та за яких умов?

У даній роботі проводиться порівняльний аналіз якості наближення показника функціональної зв'язності інформаційної системи на основі згортки матриці зв'язності цієї системи за допомогою часто розглядуваних нейронних сіток прямого розповсюдження та за допомогою поліномів Бернштейна, які, на жаль, розглядаються нечасто попри свої чудові властивості. Також демонструється специфіка застосування кожного з цих методів при наближенні та на її основі вказується, коли який із цих методів краще використовувати.

Ключові слова: функціональна стійкість; теорія наближень; машинне навчання; нейронні мережі; інформаційні системи; архітектура програмного забезпечення.

Вступ

Проєктування та застосування різного роду інформаційних систем стає все більш актуальною задачею. Зі збільшенням цієї актуальності все більш важливою, а іноді й ключовою, при вирішенні потреб самих різних сфер, постає питання не лише в розробці такої системи та в її впровадженні, а й дослідити різні аспекти, пов'язані з експлуатацією. Одним із таких аспектів є функціональна стійкість [1; 2] системи.

Під функціональною стійкістю розглядуваної системи, як правило, розуміють її здатність до виконання заданих функцій на фоні дестабілізуючих факторів. На основі цього можна сформулювати певні показники та критерії функціональної стійкості, які б дозволили оцінювати дану властивість систем.

На практиці нерідко під інформаційною системою можна розуміти певну множину машин та ліній зв'язку, що їх сполучають. Якщо ж машини можна вважати високонадійними за рахунок забезпечення, наприклад, резервування чи надлишкових потужностей, то у випадку з лініями зв'язку, в загальному випадку, ми аналогічного забезпечити не можемо в силу фінансових обмежень. Тому можна вважати, розглядувані лінії зв'язку справні з імовірністю p. На основі цього можна сформулювати такий показник функціональної стійкості як ймовірність зв'язності R_{ij} тобто ймовірність того, що між заданими машинами v_i та v_j відправлена інформація буде доставлена. Однак, ймовірність зв'язності дозволяє оцінити обмін інформацією лише між вибраною парою машин. Для того, щоб оцінити таку ймовірність передачі інформації між множиною всіх пар машин в розглядуваній інформаційній системі, більш доцільним є розгляд так званої матриці зв'язності [1]

$$W = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & 0 & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де P_{ij} — ймовірність зв'язності; n — кількість машин в досліджуваній системі. Однак, у випадку, коли нам необхідно порівняти, яка із можливих інформаційних систем (1) є більш функціонально стійкою, таке порівняння за допомогою (1) реалізувати дуже важко. Набагато простіше таке порівняння проводити через порівняння двох чисел. У такому випадку доцільним є розгляд не самих матриць зв'язності (1), а їх згорток з певним наперед заданим ядром

$$H = \begin{bmatrix} 0 & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & 0 & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n} & h_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

де $h_{ij} \in \mathrm{R}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $i \neq j$, тобто, іншими словами, як показник функціональної стійкості є сенс розглядати величину

$$C = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P_{ij} h_{ij}. \tag{3}$$

Однак, головною проблемою цього показника є складність обчислення (1), яка, в загальному випаду, становить $O(n^2 2^n)$. На основі цього постає питання про можливість застосування методів наближення, які б допомогли наближено обчислити значення критерію C.

Як відомо, методи теорії наближень почали розвиватися досить давно. До досить давно відомих, а тому добре вивчених, можна віднести інтерполяційні поліноми Лагранжа, поліноми Ерміта, сплайни, регресійні моделі, тощо. Іншими словами, досить довгий час для наближення розглядалися методи, основані на використанні певних поліномів, як правило, степеневих або тригонометричних. Останніми ж десятиліттями сильно підвищився інтерес до моделей штучного інтелекту, а зокрема, до нейронних сіток як до методів наближення. Тому логічним постає питання про порівняння поліноміальних методів наближення та методів наближення, основаних на нейронних сітках.

У даній роботі буде проведено порівняльний аналіз наближення ймовірнісного показника (3) як функції від ймовірності справності ліній зв'язку за допомогою поліномів Бернштейна та за допомогою нейронних сіток прямого розповсюдження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методи наближення функцій є досить актуальним напрямком досліджень, який розвивається досить давно. Однак, особливий інтерес до нього сформувався лише в минулому столітті в силу бурхливого науково-технічного розвитку суспільства.

Раніше при дослідженні методів наближення найчастіше розглядали степеневими та тригонометричними поліномами. Так, наприклад, в [3] розглянуто ряд чимало таких поліномів, зокрема, інтерполяційні поліноми Лагранжа, їх тригонометричні аналоги, поліноми Бернштейна, частинні суми Фур'є, поліноми Чебишева та багато інших. Причому, при розгляді багатьох із них часто вказується й метод їх отримання та демонструються способи дослідження властивостей. У [4] вже робиться акцент більш на вивченні загальних властивостей степеневих та тригонометричних поліномів. Тим не менш, основну увагу автор, все ж, приділяє властивостям інтерполяційних поліномів Лагранжа. Тим часом, в [5] розглядаються подібного роду задачі, але більш з прикладної точки зору.

Останніми десятиліттями особливий інтерес до методів наближення функції підвищується з точки зору моделювання, особливо, коли отримані моделі фактично є диференціальними, інтегральними чи інтегро-диференціальними рівняннями або різними задачами, поставленими до цих рівнянь. У випадку крайових задач до диференціальних рівнянь іноді задачу наближення можна звести до відшукання ряду, що є степеневим чи тригонометричним рядом розв'язку цієї задачі, [6]. Тоді як метод наближення можна використовувати частинні суми цих рядів. В [7] же пропонується попереднє спрощення моделі, розв'язання відповідних їй рівнянь, і використання цих розв'язків як наближений опис реальної моделі. Однак, в цьому плані останнім часом інтерес підвищується до обчислювальних методів типу методу скінченних різниць чи методу триангуляції.

Останнім часом досить сильно підвищується інтерес до моделей штучного інтелекту, зокрема, до нейронних сіток. Використання нейронних сіток з різною архітектурою застосовується як в розважальній сфері та сфері бізнесу, так і в науково-технічному напрямку. Так, наприклад, в [8] описується метод наближення розв'язків полігармонійних рівнянь за допомогою нейронних сіток. Подібним чином нейронні сітки використовують і в [9], а в [10] на основі подібного підходу досліджується можливість використання моделей штучного інтелекту для опису процесу дифузії.

Однак, попри такий широкий спектр методів застосування теорії наближення, все ще є сфери, де засоби цього напряму математики є досить мало дослідженими. Одними із таких сфер є проєктування інформаційних систем та забезпечення їх функціональної стійкості. Так, наприклад, в [1; 11] описані показники та критерії для оцінки стійкості систем, а в [12] описані способи наближеного їх обчислення. Однак, ці методи попри свою наочність досить важко реалізовуються, хоч і вважаються більш простими, аніж стандартні методи обчислення згаданих вище показників та критеріїв. Тому, метою даної роботи є дослідження застосування існуючих методів теорії наближення, а саме поліномів Бернштейна, які чомусь не дуже часто розглядаються, та нейронних сіток прямого розповсюдження.

Основна частина

Постановка задачі. Порівняти якість наближення ймовірнісного показника (3) як функції від ймовірності справності ліній зв'язку p за допомогою поліномів Бернштейна та за допомогою нейронних сіток прямого розповсюдження та дослідити специфіку застосування кожного з цих підходів.

Обчислення ймовірнісного показника функціональної стійкості. Очевидно, що значення критерію (3) буде залежати не лише від ймовірності справності ліній зв'язку p, а й від вибраного ядра згортки H. Тому, в подальшому вважатимемо, що елементи цього ядра задаються так

$$h_{ij} = \frac{1}{\left(|i-j|+1\right)^2}.$$

Тоді ймовірнісний показник функціональної стійкості (3) запишемо наступним чином

$$C = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{P_{ij}}{\left(|i-j|+1\right)^2}$$

або, що те саме в силу симетричності матриці зв'язності (1) та ядра згортки (2),

$$C = 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{P_{ij}}{\left(|i-j|+1\right)^2}. \tag{4}$$

Тепер, маючи спосіб обчислення ймовірнісного критерію функціональної стійкості інформаційної системи і, як результат, очікуваного виходу, опишемо розглядувані методи наближення.

Методи наближення, що порівнюються в даній роботі. Для початку опишемо використовувану в порівняльному аналізі нейронну мережу.

Для порівняння було вибрано нейронну мережу прямого розповсюдження з п'ятьма внутрішніми шарами: перший, третій та п'ятий містять по 260 нейронів, а другий і четверний — по 220. Як активаційну функцію взято ReLU.

На вхід планується подавати вектор виду

$$X = \begin{pmatrix} \left(\tilde{L}_{nn}(A,1,1)+p\right)^2 - \tilde{L}_{nn}(A,1,1)^2, \\ \left(\tilde{L}_{nn}(A,2,2)+p\right)^2 - \tilde{L}_{nn}(A,2,2)^2, \\ \left(\tilde{L}_{nn}(A,3,3)+p\right)^2 - \tilde{L}_{nn}(A,3,3)^2, \\ \left(\tilde{L}_{nn}(A,4,4)+p\right)^2 - \tilde{L}_{nn}(A,4,4)^2, \\ (n+p)^2 - n^2, \\ p \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $\tilde{L}_{nn}(A,i,j)$ — елементи двовимірного перетворення Лапласа матриці суміжності графа, що представляє архітектуру розглядуваної інформаційної системи.

Вибір подачі на вхід нейронної мережі саме вектору (5) пояснюється наступними факторами:

• вхід нейронної мережі сталий, що спрощує розробку, тренування та використання цієї нейронної мережі;

• завдяки використанню перетворення Лапласа враховується в неявному вигляді вся інформація про структуру системи;

• специфіка зміни кожного з елементів вектора (5) як функції має певні властивості, спільні з властивостями показника (4).

Розглянемо тепер поліноми Бернштейна. Як відомо [3], їх можна записати так:

$$B_N(f,x) = B_K(x) = \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) C_N^k x^k (1-x)^{N-k}, \tag{6}$$

де $x \in [0;1]$.

Порівняння наближення ймовірнісного показника описаними методами. Для порівняння якості наближення як приклад візьмемо розподілену систему, яку можна представити графом, наведеним на рис. 1.

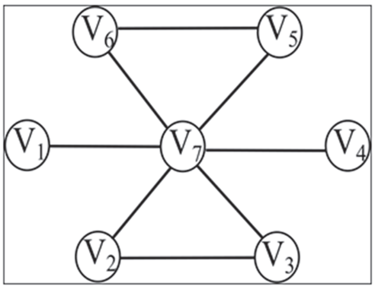

Рис. 1. Інформаційна система, для якої наближатиметься ймовірнісній показник (4)

При обчисленні та подальшого наближенні ймовірнісного показника (4) для даної системи отримаємо результат, представлений на рис. 2, із якого видно, що поліноми Бернштейна добре описують поведінку ймовірнісного показника (4). Однак, нейронна мережа, описана вище, дає гірше наближення, але непогано відтворює поведінку показника. Тому, логічним постає питання про можливу корекцію її виходу. Для корегування виходу нейронної мережі використаємо метод, описаний в [13]. Він полягає в наступному. Нехай є певна функція $f = f(x)$, яку наближають іншою функцією $P = P(x)$ на проміжку $x \in [a;b]$ Для покращення цього наближення введемо нову функцію $\widetilde{P}_n = \widetilde{P}_n(x)$, яка задається у вигляді

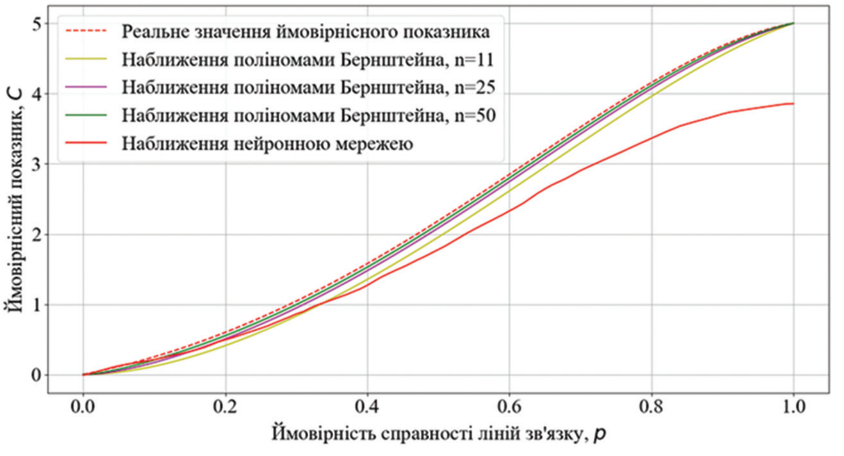

Рис. 2. Наближення ймовірнісного показника за допомогою поліномів Бернштейна та нейронних мереж

$$\widetilde{P}_n(x) = C_n P(x) + B_n.$$

Коефіцієнти C_n та B_n визначатимуться за наступними формулами

$$C_n = \frac{n\sum_{k=1}^{n} f_k P_k - \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} P_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^2}, \quad B_n = \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} P_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} f_k P_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} P_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)^2},$$

де $f_k = f(x_k)$, $P_k = P(x_k)$ і $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Застосувавши таке корегування виходу описаної нейронної мережі, отримаємо такий результат (рис. 3).

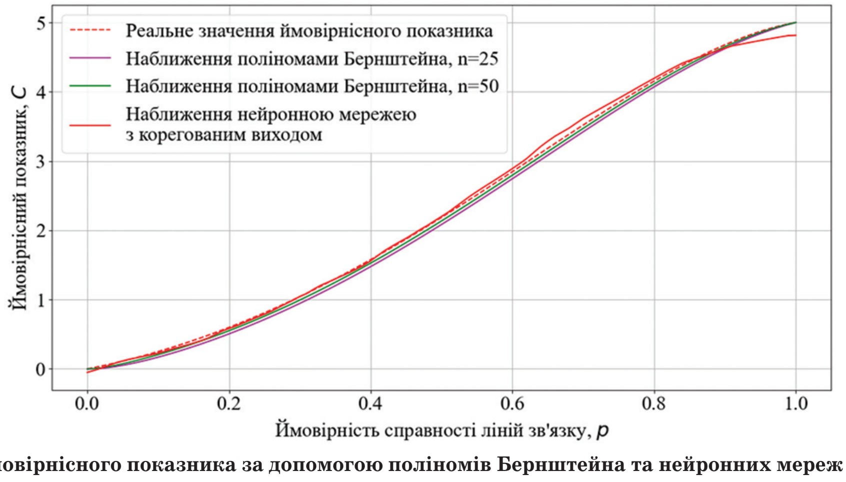

Рис. 3. Наближення ймовірнісного показника за допомогою поліномів Бернштейна та нейронних мереж після корекції виходу

Як бачимо, після корегування виходу нейронної мережі, наближення за її допомогою стало набагато кращим, аніж наближення поліномами. Однак, з іншого боку ми бачимо, що поліноми Бернштейна дають значно краще наближення при $n = 25$, тобто якщо ми їх застосовуємо у випадку, коли відомо набір значень ймовірнісного показника (4) при $p = p_i = i/24$, $i = 0,1,2,\ldots,24$. А так як обчислення цього набору є процедурою досить складною, а метод корегування виходу нейронної мережі, згаданий вище, теж залежить від об'єму нього набору, виникає питання про те, чи достатньо для цього корегування використовувати меншу кількість значень ймовірнісного показника?

Для відповіді на це питання розглянемо наступний графік.

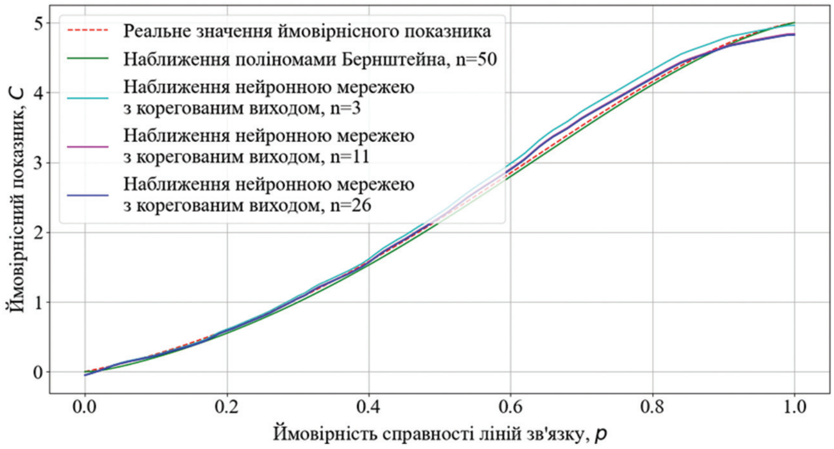

Рис. 4. Порівняння ефекту від описаної вище корекції виходу нейронної мережі залежно від значення параметру *n*

Як видно із рис. 3 та рис. 4, якщо у випадку використання поліномів Бернштейна при збільшенні параметра ці поліноми все краще представляють поведінку ймовірнісного показника (4), то у випадку корекції виходу натренованої в ході дослідження нейронної мережі брати значення параметру n вище 11 недоцільно в силу відсутності покращення наближення (на рис. 4 видно, що при $n = 11$ та $n = 26$ корегований вихід нейронної мережі фактично співпадає). Звідси випливає, що застосування поліномів Бернштейна доцільне лише в тому випадку, коли критично важливою є точність наближення ймовірнісного показника (4). Якщо ж достатньою є лише оцінка його поведінки, то доцільніше використовувати нейронні мережі прямого розповсюдження типу описаної вище.

Аналіз переваг та недоліків наведених в роботі методів наближення. Як показано вище, непогане наближення ймовірнісного показника (4) можна отримати як за допомогою поліномів Бернштейна, так і за допомогою нейронних сіток. Однак, кожен із цих методів має низку важливих переваг та недоліків, які слід враховувати.

Так, наприклад, якщо розглядати показник (4) як функцію від ймовірності справності ліній зв'язку, то для наближення поліномами Бернштейна необхідно мати набір рівновіддалених значень цієї ймовірності справності та відповідних значень ймовірнісного показника. У випадку ж нейронної сітки необхідність в такому наборі з'являється лише на етапі корегування значень виходу. Але використання нейронних сіток вимагає попередніх збору даних, вибору архітектури та навчання цих сіток, що робить їх застосування більш складним для використання інструментом.

З іншого боку якість наближення поліномами Бернштейна залежить від параметра або, іншими словами, об'єму набору пар параметр-значення, тим часом, коли нейронні сітки типу описаної вище такої залежності не мають. Цей фактор робить нейронні сітки більш універсальним методом наближення, аніж поліноми Бернштейна.

Висновки

В даній роботі було порівняно якість наближення ймовірнісного показника (4) функціональної стійкості інформаційних систем як функції від ймовірності справності ліній зв'язку p за допомогою поліномів Бернштейна та за допомогою нейронних сіток. Як було показано, за допомогою поліномів Бернштейна можна досягнути значно кращого наближення, однак, це вимагає значно більшої кількості обчислень за рахунок великої кількості вже обрахованих значень показника при різних значеннях p. З іншого боку, використання нейронних сіток допомагає оцінити основну логіку поведінки ймовірнісного показника (4), нейронна сітка вимагатиме однакову кількість обчислень незалежно від розмірів інформаційної системи. Але у випадку її застосування доведеться використовувати корегування виходу, наприклад, описане в [13], яке теж вимагатиме певних попередньо відомих значень ймовірнісного показника, що наближається.

Отже, при виборі одного із вище згаданих методів наближення необхідно визначити, що є важливішим в контексті поставленої задачі: точність наближення ймовірнісного показника (4) чи менша обчислювальна складність? У першому випадку варто використовувати поліноми Бернштейна, а в другому достатньо попередньо навченої нейронної мережі прямого розповсюдження.

Список використаної літератури

1. **Барабаш О. В.** *Побудова функціонально стійких розподілених інформаційних систем. К.: НАОУ, 2004. 226 с.*

2. **Березовська Ю. В.** *Забезпечення функціональної стійкості інформаційної системи при обмеженій вихідній інформації про визначальні випадкові величини // Телекомунікаційні та інформаційні технології. 2020. № 4(69). С. 69–78.*

3. **Гончаров В. Л.** *Теорія інтерполювання та наближення функцій. 2-ге вид. Держ. вид-во техн.-теорет. літ., 1954. 327 с.*

4. **Davis P. J.** *Interpolation and approximation. New York: Dover Publications, Inc., 1975. 409 p.*

5. **Hamming R. W.** *Numerical methods for scientists and engineers. 2nd ed. New York: Dover Publications, Inc., 1986. 731 p.*

6. **Перестюк М. О., Маринець В. В.** *Теорія рівнянь математичної фізики. Либідь, 2006. 424 с.*

7. **Коллатс Л., Крабс В.** *Теорія наближень. Чебишевські наближення та їх застосування. Наука, 1978. 272 с.*

8. **Cen J., Chen X., Xu M., Zou Q.** *Deep finite volume method for high-dimensional partial differential equations, 2023. 16 p. (Preprint. arXiv:2305:06863v1).*

9. **SineNet:** *Learning Temporal Dynamics in Timedependent Partial Differential Equations / X. Zhang, J. Helwig, Y. Lin [et al.]. 2024, 42 p. (Preprint. Arxiv:2403:19507v1).*

10. **GrINd:** *Grid Interpolation Network for Scattered Observations / A. Dulny, P. Heinisch, A. Hotho, A. Krause/ 2024, 19 p. (Preprint. arXiv:2403:19570v1).*

11. **Саланда І. П., Барабаш О. В., Мусієнко А. П.** *Система показників та критеріїв формалізації процесів забезпечення локальної функціональної стійкості розгалужених інформаційних мереж // Системи управління, навігації та зв'язку, 2017. Т. 41, № 1. С. 122–126.*

12. **Калашник Г. А., Обідін Д. М., Калашник М. А.** *Забезпечення стійкого функціонування засобів навігації літальних апаратів під впливом зовнішніх дестабілізуючих факторів // Системи обробки інформації, 2016. Т. 140, № 3. С. 52–56.*

13. **Application** *of Trigonometric Interpolation Polynomials to Signal Processing / A. Makarchuk, I. Kal'chuk, Y. Kharkevych, G. Kharkevych // IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2022. Proceedings. P. 156–159.*

O. Barabash, D. Obidin, I. Salanda, A. Makarchuk

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE APPROXIMATION OF A PROBABILISTIC INDICATOR OF FUNCTIONAL STABILITY USING BERNSTEIN POLYNOMIALS AND FEED-FORWARD NEURAL NETWORKS

The use of multi-machine information systems is becoming an increasingly popular component of a wide variety of fields of activity. The increase in the number of problems solved through information systems and the increase in their complexity makes the study of the functional stability of the systems under consideration increasingly relevant.

The functional stability of an information system is understood as the ability of this system to perform specified functions under the influence of negative influences. At the moment, a number of indicators have been developed to evaluate functional stability numerically. One such indicator is the convolution of the connectivity matrix.

Convolution of the connectivity matrix, despite its completeness, has one very significant drawback: its calculation is a rather complicated procedure. Based on this, the question of approximate calculation of this indicator is logical. Since the convolution of the connectivity matrix can be considered as a function of the probability of serviceability of communication lines, an attempt to use certain methods of approximation theory is obvious.

At the moment, methods of approximation theory are quite developed. Some of these methods are quite well researched, while others are just gaining popularity. The first group includes Lagrange interpolation polynomials, Legendre polynomials, Bernstein polynomials, splines, partial sums of series, etc., and the second group includes machine learning models, including feedforward neural networks, regression models, and others. Accordingly, the question immediately arises: which of these methods would allow better approximation of the convolution of the connectivity matrix and under what conditions?

This paper provides a comparative analysis of the quality of approximation of the functional connectivity indicator of an information system based on the convolution of the connectivity matrix of this system using often considered feed-forward neural networks and using Bernstein polynomials, which, unfortunately, are not often considered despite their remarkable properties. The specifics of using each of these methods when approaching are also demonstrated and, based on this, it is indicated when which of these methods is better to use.

Keywords: functional stability; approximation theory; machine learning; neural networks; information systems; software architecture.