УДК 519.856+519.217]:004.056.5 **DOI:** 10.31673/2412-9070.2024.041018

А. АЛЬ-АММОРІ, доктор техн. наук, професор, ORCID: 0000-0002-6422-7488;
Р. М. ІЩЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доцент, ORCID: 0000-0003-0158-4020;
А. Є. КЛОЧАН, PhD, асистент, ORCID: 0000-0002-4225-9382;
О. П. ШКУРКО, канд. наук з соц. комунікацій, доцент, ORCID: 0000-0002-0936-886X;
Х. А. АЛЬ-АММОРІ, аспірант, ORCID: 0000-0002-1371-2205,
Національний транспортний університет, Київ

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ СТОХАСТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ

Розроблена стохастична модель складної динамічної системи, яка може знаходитись в одному із можливих станів, що характеризують її роботоздатність. Застосування теорії марковських випадкових процесів надає можливість визначити важливі характеристики надійності таких систем. У роботі враховуються елементи інформаційної безпеки і захисту інформації з точки зору функціональної надійності. Розроблена технологія розрахунків засобами Mathcad та проведені відповідні розрахунки.

Ключові слова: інформаційні технології; захист інформації; достовірність інформації; оптимізація; надійність; алгоритм.

ВСТУП

У роботі [1] розроблена модель надійності складної системи, множина станів якої характеризує її роботоздатність. Досліджувалась комп'ютерна система із двох комп'ютерів, множина станів яких описується наступним чином: $A_a(B_a)$ означає, що $A(B)$ є основним комп'ютером; $A_a(B_s) - A(B)$ знаходиться у стані резерву; $A_p(B_p) - A(B)$ знаходиться у стані профілактичного обслуговування. Опис динаміки процесу функціонування даної системи здійснено за допомогою неперервного ланцюга Маркова. Застосування теорії марковських випадкових процесів надало можливість визначити деякі важливі характеристики надійності та захисту системи.

Необхідно відзначити, що узагальнення цієї моделі на випадок, коли кожний із комп'ютерів під час роботи може виходити з ладу і перебувати у стані ремонту $A_p(B_p)$ є актуальною науково-технічною задачею. Таке узагальнення надає можливість розглядати більш складні технічні системи і розширити область практичного застосування розробленої моделі з врахуванням стану об'єктів захисту інформації для забезпечення відмово-безпеки системи.

Розглядається ймовірнісна марковська модель складної динамічної системи. Теорія марковських випадкових процесів надає можливість визначити важливі характеристики надійності системи, такі як середнє число попадань у стан j із стану i до того, як вона попаде у критичний стан; кількість кроків, необхідних до першого попадання системи у стан j із стану i, стаціонарні ймовірності станів системи, середню кількість попадань у стан j за n кроків, якщо процес починається із стану i (кількість відновлень) тощо. Застосовуючи деякі положення теорії напівмарковських процесів, у роботі також визначені основні часові характеристики комп'ютеризованої системи захисту інформації.

Для чисельної реалізації моделі розроблена інформаційна технологія розрахунків вказаних показників засобами системи комп'ютерної математики Mathcad та проведені відповідні розрахунки.

Метою роботи є розробка стохастичної моделі надійності складної динамічної системи, яка описується марковським випадковим процесом, та інформаційної технології її реалізації у Mathcad.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Система характеризуються тим, що у будь-який момент часу вона може знаходитись в одному із множини можливих станів. Для оцінки надійності та безпеки системи розглянемо ймовірнісну модель, яка описується ланцюгом Маркова. У ланцюзі Маркова система розділена на стани $S = (s_1,..,s_n)$ і у кожний момент часу система знаходиться в одному із цих станів. Ймовірності переходу системи із одного стану в інші залежать тільки від стану системи у поточний момент часу і не залежать від того, як система досягла свого теперішнього стану.

У відповідності із загальною методикою, для опису поведінки систем за допомогою марковських ланцюгів необхідно:

- ввести поняття стану системи;
- показати всі стани, в яких може перебувати система;
- скласти граф станів, тобто вказати шляхи можливих безпосередніх переходів системи зі стану у стан;

• показати, в якому стані знаходиться система в початковий момент часу або задати розподіл початкових станів;

• задати матрицю ймовірностей переходу ланцюга Маркова $P = [p_{ij}(t)]$ зі стану i у стан j на інтервалі часу (s,t).

Ймовірності переходів неперервних ланцюгів Маркова визначаються як функції часу у вигляді

$$p_{ij}(s,\ t) = P[X(t) = j/X(s) = i], \tag{1}$$

де $X(t)$ — положення ланцюга Маркова в момент часу $t \geq s$.

Для однорідних неперервних ланцюгів Маркова ймовірності переходів дорівнюють

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(s,\ s+t);\quad i,j = 1,2,\ldots \tag{2}$$

У теорії марковських процесів встановлено наступний факт: для скінченого однорідного ланцюга Маркова завжди існують граничні стаціонарні ймовірності $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j$, які не залежать від початкового стану ланцюга. Стаціонарний розподіл π_j однозначно визначається рівняннями

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij},\ \ j = 1,2,\ldots\ \sum_i \pi_j = 1, \tag{3}$$

де для стислості введено позначення $p_{ij}(t) = p_{ij}$.

У матричній формі ця формула має вигляд:

$$\pi = \pi P^T \ \text{ або } \ \pi\left(P^T - I\right) = 0,\ \sum_{j=0}^{n} \pi_j = 1, \tag{4}$$

де P — матриця переходів; I — одинична матриця.

Стани марковського ланцюга мають таку класифікацію:

• Стан j називається досяжним зі стану i, якщо з імовірністю $p_{ij}^{(n)} > 0$ система за n кроків може перейти зі стану i у стан j.

• Множина станів S називається замкненою, якщо $p_{ij} = 0$ при всіх i та j таких, що $i \in S$, а $j \notin S$. Ніякий зовні S стан j не є досяжним із ніякого стану i, що входить у S. Отже, множина станів S буде замкненою тоді, коли для дослідження надійності великих систем розглядаються два класи ланцюгів Маркова: *ергодичні* та *поглинаючі* ланцюги.

• ***Ергодичні ланцюги*** — це ланцюги, які складаються із єдиної замкнутої множини, для якої $p_{ij} > 0$ для $i,j = 1,\ldots,n$. Більш того, ланцюг Макова називається ергодичним, якщо існують граничні ймовірності π_j.

• ***Поглинаючі ланцюги*** — це ланцюги, які мають поглинаючі стани. Стан i є поглинаючим лише тоді, коли $p_{ij} = 1$. З поглинаючого стану недосяжний ніякий стан.

При вивченні поглинаючих ланцюгів Маркова інтерес представляють наступні величини:

1. Ймовірність переходу у поглинаючий стан j при умові, що процес почався у непоглинаючому стані i.

2. Середній час перебування процесу у непоглинаючому стані i до його переходу у деякий поглинаючий стан j.

3. Середнє число кроків до переходу процесу у деякий поглинаючий стан j при умові, що початковий стан i є непоглинаючим.

Ці величини можуть бути визначені через ймовірності матриці переходів P. У загальному випадку матриця переходів P може бути представлена у канонічній формі

$$P = \left|\begin{array}{c:c} I & O \\ \hdashline R & Q \end{array}\right|,$$

де I — одинична матриця; 0 — нульова матриця; R — матриця перехідних ймовірностей із нестійких станів у поглинаючі.

Фундаментальна матриця поглинаючого ланцюга є матриця $C = (I - Q)^{-1}$, де Q — матриця переходів із нестійких станів у нестійкі.

Для поглинаючого ланцюга Маркова число попадань у непоглинаючий стан j при умові, що у початковий момент він знаходився у непоглинаючому стані s_i дорівнює елементу C_{ij} фундаментальної матриці C. Середнє число кроків до поглинання при умові, що у початковий момент процес знаходився у непоглинаючому стані s_i, дорівнює сумі елементів i-го рядка матриці C.

Простір станів системи із n елементів може бути представлений у вигляді графа, в якому кожна i-а вершина ($i = 1,..,n$) відповідає i-му стану та характеризується ймовірністю переходу p_{ij} з i-ї вершини у j-у.

При певних припущеннях про розподіл часу роботи системи до відмови, тривалості профілактики, тривалості ремонту і т.д. процес переходу системи із стану у стан може бути описаний так званим напівмарковським процесом. При використанні подібної системи представляє інтерес визначення середнього часу простою системи протягом заданого інтервалу часу, ймовірність того, що час простою виявиться більше T годин і знайти правило раціонального обслуговування. Для того, щоб вирішити подібні задачі, далі розглянемо деякі важливі ідеї із теорії напівмарковських процесів.

Марковські ланцюги можуть бути узагальнені наступним чином. Нехай, як і раніше, $P = (p_{ij})$ означає матрицю перехідних ймовірностей однорідного у часі ланцюга з $n + 1$ станами (тобто $i,j = 0,1,\ldots,n$). Визначення процесу $\{Y(t),\ t \geq 0\}$, де $Y(t) = i$ означає, що процес знаходиться у стані i в момент t. Нехай процес знаходиться спочатку у стані i, а у подальшому вибір станів здійснюється у відповідності з матрицею перехідних ймовірностей $P = (p_{ij})$. Функцію розподілу тривалості перебування процесу у стані i при умові, що наступний перехід буде здійснений у стан j, позначимо через $F_{ij}(t)$. Процес є марковським тільки у певні «марковські моменти» часу, у які здійснюється перехід із стану у стан. Якщо задати вектор початкових ймовірностей $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$, то отриманий процес буде називатись напівмарковським.

Однорідні у часі марковські ланцюги є напівмарковськими процесами, у яких

$$F_{ij}(t)=\begin{cases}0,\ t<1,\\ 1,\ t\geq 1.\end{cases} \tag{5}$$

Стаціонарний марковський процес з неперервним часом є напівмарковським процесом, у якого тривалість перебування у всіх станах має експоненціальний розподіл

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t},\quad t \geq 0,\quad \lambda_i > 0. \tag{6}$$

Основні питання, що нас будуть цікавити:

1. Чому дорівнює середній час до попадання у стан i?
2. Чому дорівнює середнє число попадань процесу у стан i?
3. Яка стаціонарна ймовірність того, що процес опиниться у стані i?

Позначимо через $F_{ij}(t)$, $F_i(t)$, μ_i відповідно функцію розподілу часу першого попадання із стану i у стан j, функцію розподілу безумовного часу перебування процесу у стані i безумовне математичне сподівання часу перебування у стані i, $F_i(t)=\sum_{j=0}^{n} p_{ij}F_{ij}$.

Позначимо через l_{ij} середній час до першого попадання процесу із стану i у стан j. Тоді

$$l_{ij} = \sum_{k\neq j} p_{ik}\left(\mu_{ik} + l_{kj}\right) + p_{ij}\mu_{ij}, \tag{7}$$

де μ_{ij} є середнє значення для розподілу $F_{ij}(t)$. Оскільки $\mu_i = \sum_{k=0}^{n} p_{ik}\mu_{ik}$, отримуємо

$$l_{ij} = \sum_{k\neq j}\left(p_{ik}l_{kj}\right) + \mu_j,\ \text{або}\ L = (l_{ij}) = P(L - L_{dg}) + M, \tag{8}$$

де матриця L_{dg} отримана із матриці L шляхом заміни недіагональних елементів нулями.

Якщо всі стани сполучаються, то існує вектор $\pi = (\pi_0, \pi_1,\ldots, \pi_n)$ стаціонарних ймовірностей для вкладеного марковського ланцюга. Запишемо

$$L = L_{dg} + L_0 \quad \text{і} \quad L_{dg} = (P - I)L_0 + M, \tag{9}$$

де матриця L_0 отримана із матриці L шляхом заміни діагональних елементів нулями.

Звідси, помноживши обидві частини на π, отримаємо

$$\pi L_{dg} = \pi M \quad \text{або} \quad l_{ii} = \frac{1}{\pi_i}\sum_{k=0}^{n}\pi_k\mu_k. \tag{10}$$

Для того, щоб проілюструвати, яким чином може бути побудований простір станів і діаграма переходів для складної системи, розглянемо математичну модель процесу функціонування комп'ютерної системи, що використовується в автопарку або для забезпечення моніторингу і керування рухом на транспорті [4-7]. Система складається із двох комп'ютерів, включених паралельно. Один із комп'ютерів працює постійно і використовується безпосередньо для вирішення задач, а другий знаходиться у пасивному резерві або проходить профілактичне обслуговування. При виникненні будь-якої несправності у процесі роботи комп'ютера проводиться його ремонт. Профілактичне обслуговування комп'ютерів виконується після t_0 годин наробітку. Система побудована таким чином, що якщо основний комп'ютер відмовляє у той момент, коли інша знаходиться у стані профілактичного обслуговування або ремонту, то система попадає у стан відмови. Зауважимо, що якщо усі стани системи є некритичними, то її можна модифікувати таким чином, що один з них стає поглинаючим. Таким шляхом можна обчислити середній час до попадання у заданий стан для будь якої системи.

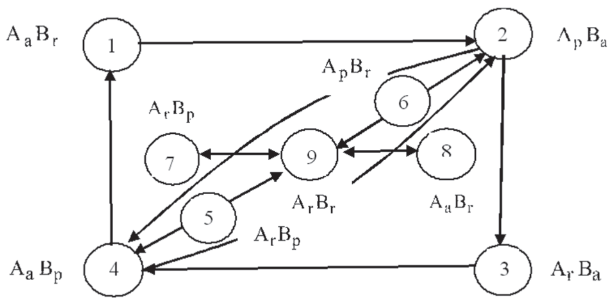
Позначимо один із комп'ютерів символом A, а другий — символом B. Тоді можливі стани системи можна позначити наступним чином:

- $A_a(B_a) - A(B)$ є основним комп'ютером;
- $A_s(B_s) - A(B)$ знаходиться у стані резерву;
- $A_p(B_p) - A(B)$ знаходиться у стані профілактичного обслуговування;
- $A_r(B_r) - A(B)$ знаходиться у стані ремонту.

Позначимо через t_0 запланований період до профілактики, τ — час проведення профілактики. Припустимо, що час наробітку комп'ютерів у стані основних — $A_a(B_a)$, час тривалості профілактики та час проведення ремонту є випадковими величинами з експоненціальними законами розподілів $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $F_2(t) = 1 - e^{-\mu t}$ і $F_3(t) = 1 - e^{-\nu t}$ при $t \geq 0$ з параметрами λ, μ і ν.

На рисунку представлена діаграма можливих переходів системи у просторі станів. Всього є 9 можливих станів системи, пронумерованих від 1 до 9. У якості вершин візьмемо усі можливі стани системи і проведемо стрілки із кожного стану i у кожний стан j, якщо ймовірності переходів $p_{ij} > 0$. Наприклад, якщо система знаходиться у стані 1, то це означає, що комп'ютер A_a використовується у якості основного у той час, як комп'ютер B_s знаходиться у стані резерву. Якщо протягом часу t_0, який вимірюється з моменту попадання у стан 1, не виникло відмови, система переходить у стан 2, у якому комп'ютер A_a переходить у стан профілактики A_p, а основним стає комп'ютер B_a.

Переходи системи із одного робочого стану у інший відбуваються по периметру графа, зображеного на рисунку. Якщо основний комп'ютер відмовляє (стає на ремонт) в момент, коли другий знаходиться у стані профілактичного обслуговування або ремонту, то система, звичайно, попадає у стан відмови. У системі, яка розглядається, несприятливими станами є стани 5, 6, 9.



Простір станів і діаграма переходів для системи із двох елементів

Розглянутий процес представляється марковським неперервним ланцюгом. Визначимо ймовірності його переходів.

Для визначення ймовірностей переходів, окрім функцій розподілу $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, визначимо також функції розподілу мінімуму двох випадкових величин. Позначимо через T_x, де $x = (a,s,p,r)$ — час знаходження елемента системи AB у станах x.

Для $T_1 = \min(T_a,T_p)$, $T_2 = \min(T_p,T_r)$, $T_3 = \min(T_a,T_r)$, отримуємо

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) - F_1(t)F_2(t),\ G(t) = F_2(t) + F_3(t) - F_2(t)F_3(t),\ H(t) = F_1(t) + F_3(t) - F_1(t)F_3(t).$$

Використовуючи визначені функції розподілу, отримуємо:

$$\begin{aligned}
i = 1\quad & p_{1,1} = P(A_aB_s \to A_aB_s) = \frac{P(T_a \geq t_0 - 0)}{2} = \frac{1 - F_1(t_0)}{2}, \qquad (11)\\
& p_{1,2} = P(A_aB_s \to A_pB_a) = \frac{P(T_a \geq t_0 + 0)}{2} = \frac{1 - F_1(t_0)}{2},\\
& p_{1,7} = P(A_aB_s \to A_rB_a) = P(T_a < t_0) = F_1(t_0).\\
i = 2\quad & p_{2,2} = P(A_pB_a \to A_pB_a) = P(T_p \geq \tau,\ T_a \geq \tau) = 1 - F(\tau),\\
& p_{2,3} = P(A_pB_a \to A_sB_a) = P(T_p < \tau,\ T_a \geq \tau) = F_2(\tau)(1 - F_1(\tau)),\\
& p_{2,6} = P(A_pB_a \to A_pB_r) = P(T_p \geq \tau,\ T_a < \tau) = (1 - F_2(\tau))F_1(\tau),\\
& p_{2,8} = P(A_pB_a \to A_pB_r) = P(T_p < \tau,\ T_a < \tau) = F_2(\tau)F_1(\tau).\\
i = 3\quad & p_{3,3} = P(A_sB_a \to A_aB_p) = \frac{P(T_a \geq t_0 - 0)}{2} = \frac{1 - F_1(t_0)}{2},\\
& p_{3,4} = P(A_sB_a \to A_aB_p) = \frac{P(T_a \geq t_0 + 0)}{2} = \frac{1 - F_1(t_0)}{2},\\
& p_{3,7} = P(A_sB_a \to A_aB_r) = P(T_a < t_0) = F_1(t_0).\\
i = 4\quad & p_{4,4} = P(A_aB_p \to A_aB_p) = P(T_p \geq \tau,\ T_a \geq \tau) = 1 - F(\tau),\\
& p_{4,1} = P(A_aB_p \to A_aB_s) = P(T_a \geq \tau,\ T_p < \tau) = (1 - F_1(\tau))F_2(\tau),\\
& p_{4,5} = P(A_aB_p \to A_rB_p) = P(T_a < \tau,\ T_p \geq \tau) = F_1(\tau)(1 - F_2(\tau)),\\
& p_{4,7} = P(A_pB_a \to A_pB_r) = P(T_a < \tau,\ T_p < \tau) = F_1(\tau)F_2(\tau).\\
i = 5\quad & p_{5,5} = P(A_rB_p \to A_rB_p) = P(T_p \geq \tau,\ T_r \geq \tau) = 1 - G(\tau),\\
& p_{5,4} = P(A_rB_p \to A_aB_p) = P(T_r < \tau) = F_3(\tau),\\
& p_{5,7} = P(A_rB_p \to A_rB_a) = P(T_r \geq \tau,\ T_p < \tau) = (1 - F_3(\tau))F_2(\tau).
\end{aligned}$$

$i = 6$ $p_{6,6} = P(A_pB_r \to A_pB_r) = P(T_r \geq \tau,\ T_a \geq \tau) = 1 - H(\tau)$,

$p_{6,2} = P(A_pB_r \to A_pB_a) = P(T_r < \tau) = F_3(\tau)$,

$p_{6,8} = P(A_pB_r \to A_aB_r) = P(T_r \geq \tau,\ T_p < \tau) = F_2(\tau)(1 - F_3(\tau))$.

$i = 7$ $p_{7,7} = P(A_rB_a \to A_rB_a) = P(T_r \geq t_0,\ T_a \geq t_0) = \dfrac{1 - H(t_0)}{2}$,

$p_{7,3} = P(A_rB_a \to A_sB_a) = P(T_r < t_0,\ T_a \geq t_0) = F_3(t_0)(1 - F_1(t_0))$,

$p_{7,4} = P(A_rB_a \to A_sB_p) = P(T_r < t_0,\ T_a < t_0) = F_3(t_0)F_1(t_0)$,

$p_{7,5} = P(A_rB_a \to A_rB_p) = \dfrac{P(T_r \geq t_0; T_a \geq t_0)}{2} = \dfrac{1 - H(t_0)}{2}$,

$p_{7,9} = P(A_rB_a \to A_rB_r) = P(T_r \geq t_0,\ T_r < t_0) = (1 - F_3(t_0))F_1(t_0)$.

$i = 8$ $p_{8,8} = P(A_aB_r \to A_aB_r) = \dfrac{P(T_a \geq t_0; T_r \geq t_0)}{2}, \dfrac{1 - H(t_0)}{2}$,

$p_{8,1} = P(A_aB_r \to A_aB_s) = P(T_a \geq t_0,\ T_r < t_0) = (1 - F_1(t_0))F_3(t_0)$,

$p_{8,2} = P(A_aB_r \to A_pB_s) = P(T_a < t_0,\ T_r < t_0) = F_3(t_0)F_1(t_0)$,

$p_{8,6} = P(A_aB_r \to A_pB_r) = \dfrac{P(T_a \geq t_0; T_r \geq t_0)}{2} = \dfrac{1 - H(t_0)}{2}$,

$p_{8,9} = P(A_aB_r \to A_rB_r) = P(T_a < t_0,\ T_r \geq t_0) = F_1(t_0)(1 - F_3(t_0))$.

$i = 9$ $p_{9,9} = P(A_rB_r \to A_rB_r) = P(T_r \geq u,\ T_r \geq u) = (1 - F_3(u))^2$,

$p_{9,7} = P(A_rB_r \to A_rB_a) = 1/2\ \mathrm{P}(T_r \geq u,\ T_r < u) = 1/2\ (1 - p_{9,9})$,

$p_{9,8} = P(A_rB_r \to A_aB_r) = 1/2\ \mathrm{P}(T_r < u,\ T_r \geq t_0) = 1/2\ (1 - p_{9,9})$.

При визначенні перехідних ймовірностей на кожному кроці перевіряємо умову

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

При визначенні ймовірностей сумісних подій ми користувались незалежністю часів перебування елементів системи у заданих станах. Наприклад, для стану $i = 6$

$$p_{2,3} = P(T_p < \tau,\ T_p \geq \tau) = P(T_p < \tau)P(T_p \geq \tau) = F_2(\tau)(1 - F_1(\tau)). \quad (12)$$

Визначимо характеристики процесу функціонування системи, які характеризують її надійність: середнє число попадань системи із стану i у стан j; середнє число попадань системи у стан j із стану i до того, як система попаде у критичний стан; стаціонарний розподіл ймовірностей станів системи; кількість кроків, які потрібні системі для першого досягнення стану j за умови виходу із стану i.

Вхідні дані: час наробітку системи до переходу у стан профілактики $t_0 = 24$ год, час наробітку системи на відмову $t_1 = 48$ год, час перебування комп'ютера у стані профілактики $\tau = 1$ год, час тривалості ремонту $t_2 = 6$ год, параметри $\lambda = 1/u$, $\mu = 1/\tau$, $\nu = 1/\nu$. В алгоритмі у Mathcad перехідні ймовірності представлені матрицями р.

Алгоритм розв'язання у Mathad

Вхідні дані: $n := 9$ $t_0 := 24$ $u := 48$ $\lambda := 1/u$ $\tau := 1$ $\mu := 1/\tau$ $\mu := 1/\tau$ $\nu := 16$ $\nu := 1/u$

$$F_1(t) := 1 - e^{-\lambda t} \quad F_2(t) := 1 - e^{-\mu t} \quad F_3(t) := 1 - e^{-\nu t}$$

Визначення ймовірностей переходів здійснюється за формулами (9). Матриця перехідних ймовірностей має вигляд

$$p := \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1,7} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,2} & p_{2,3} & 0 & 0 & p_{2,6} & 0 & p_{2,8} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3,3} & p_{3,4} & 0 & 0 & 0 & p_{3,8} & 0 \\ p_{4,1} & 0 & p_{4,3} & p_{4,4} & p_{4,5} & 0 & p_{4,7} & p_{4,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{5,4} & p_{5,5} & 0 & p_{5,7} & p_{5,8} & 0 \\ 0 & p_{6,2} & 0 & 0 & 0 & p_{6,6} & 0 & p_{6,8} & 0 \\ p_{7,1} & 0 & p_{7,3} & 0 & 0 & 0 & p_{7,7} & 0 & p_{7,9} \\ p_{8,1} & p_{8,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{8,8} & p_{8,9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{9,7} & p_{9,8} & p_{9,9} \end{pmatrix}.$$

Числові значення ймовірностей переходів

$$p=\begin{pmatrix} 0{,}303 & 0{,}303 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}393 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}36 & 0{,}619 & 0 & 0 & 0{,}008 & 0 & 0{,}013 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}303 & 0{,}303 & 0 & 0 & 0 & 0{,}393 & 0 \\ 0{,}619 & 0 & 0 & 0{,}36 & 0{,}008 & 0 & 0{,}013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}061 & 0{,}346 & 0 & 0{,}594 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}061 & 0 & 0 & 0 & 0{,}346 & 0 & 0{,}594 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}471 & 0{,}306 & 0 & 0 & 0{,}068 & 0 & 0{,}088 \\ 0{,}471 & 0{,}306 & 0 & 0 & 0 & 0{,}068 & 0 & 0{,}068 & 0{,}088 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}499 & 0{,}499 & 0{,}002 \end{pmatrix}.$$

Матриця P є стохастичною, оскільки суми елементів її рядків дорівнюють 1:

$$i:=1..n \quad P_i:=\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \quad P^T(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1).$$

Знайдемо характеристики системи:

1) Середнє число попадань системи у стан j із стану i до того, як система попаде у критичний стан — стан 9 (A_r,B_r). Викреслюючи 9-й рядок і 9-й стовпець матриці $I-p$, які відповідають стану 9, де I — одинична матриця, знаходимо фундаментальну матрицю C^{-1}:

$$I:=identity(n-1) \quad i:=1..n-1 \quad j:=1..n-1 \quad pl_{ij}:=p_{ij}$$

$$C:=I-pl \quad m:=C^{-1} \quad m=\begin{pmatrix} 12{,}6 & 8{,}7 & 11{,}7 & 8{,}4 & 0{,}7 & 0{,}7 & 5{,}9 & 5{,}5 \\ 11{,}7 & 10 & 12{,}6 & 8{,}6 & 0{,}7 & 0{,}7 & 5{,}5 & 5{,}9 \\ 11{,}7 & 8{,}4 & 12{,}6 & 8{,}7 & 0{,}7 & 0{,}7 & 5{,}5 & 5{,}9 \\ 12{,}6 & 8{,}6 & 11{,}7 & 10 & 0{,}7 & 0{,}7 & 5{,}9 & 5{,}5 \\ 11 & 7{,}8 & 11{,}1 & 8{,}4 & 2{,}3 & 0{,}6 & 6{,}2 & 5{,}2 \\ 11{,}1 & 8{,}4 & 11 & 7{,}8 & 0{,}6 & 2{,}3 & 5{,}2 & 6{,}2 \\ 10{,}8 & 7{,}7 & 11 & 8{,}3 & 0{,}7 & 0{,}6 & 6{,}2 & 5{,}2 \\ 11 & 8{,}3 & 10{,}8 & 7{,}7 & 0{,}6 & 0{,}7 & 5{,}2 & 6{,}2 \end{pmatrix}.$$

Із матриці m видно, що система знаходиться у стані 1 в середньому 12,6 разів, у стані 2 — 8,7 разів, у стані 3 —11,7 разів, у стані 4 — 8,4 рази і т.д. до того, як вона побуває у стані повного ремонту — у стані 9. Середній час роботи до першої відмови комп'ютера дорівнює 48 год, а профілактика планується через кожні 24 години. Середній час перебування системи у станах 1, 2, 3, 4 до попадання у стан 9, проте набагато більше середнього часу перебування системи у станах 5, 6, 7, 8. У цьому можна впевнитись наступним чином.

Середнє число кроків до переходу процесу у критичний стан 9 за умови, що початковий стан і є некритичний, дорівнює сумі елементів рядків матриці m:

$$S_i:=\sum_{j=1}^{n-1} m_{ij} \quad S^T(54{,}2\ \ 55{,}7\ \ 54{,}2\ \ 55{,}7\ \ 52{,}6\ \ 52{,}6\ \ 50{,}6\ \ 50{,}6).$$

2) Стаціонарний розподіл ймовірностей станів системи $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$. Для цього визначимо матрицю $C=p^T-1$, у якій останній рядок замінений коефіцієнтами рівняння нормування ймовірностей $\sum_{j=1}^{n}\pi_i=1$, а також задамо вектор q правих частин рівняння $C^T\pi=q$:

$$I:=identity(n) \quad C:=I-p^T \quad j:=1..n \quad C_{n,j}:=1 \quad q_n:=1 \quad q^T=(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1).$$

Отримуємо стаціонарний розподіл станів системи

$$\pi:=C^{-1}\cdot q \quad \pi^T=(0{,}212\ \ 0{,}155\ \ 0{,}212\ \ 0{,}155\ \ 0{,}013\ \ 0{,}013\ \ 0{,}11\ \ 0{,}11\ \ 0{,}019) \quad \sum\pi=1.$$

Ймовірності π_i характеризують частину часу перебування системи у відповідних станах. Так більшу частину часу система проводить у станах 1–4, меншу у станах 5–9. Ймовірності знаходження системи у робочому і неробочому стані дорівнюють

$$P_\partial:=\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_7+\pi_8 \quad P_\partial=0{,}954 \quad P_{i\partial}:=\pi_5+\pi_6+\pi_9 \quad P_{i\partial}=0{,}046$$

3) Середнє число попадань у стан j між двома послідовними попаданнями у стан i визначається як відношення ймовірностей π_j і π_i:

$$i := 1..n \quad j := 1..n \quad A_{i,j} := \frac{\pi_j}{\pi_i} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 1,4 & 1 & 1,4 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,7 & 0,7 & 0,1 \\ 1 & 0,7 & 1 & 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,5 & 0,5 & 0,1 \\ 1,4 & 1 & 1,4 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,7 & 0,7 & 0,1 \\ 16 & 11,7 & 16 & 11,7 & 1 & 1 & 8,4 & 8,4 & 1,5 \\ 16 & 11,7 & 16 & 11,7 & 1 & 1 & 8,4 & 8,4 & 1,5 \\ 1,9 & 1,4 & 1,9 & 1,4 & 0,1 & 0,1 & 1 & 1 & 0,2 \\ 1,9 & 1,4 & 1,9 & 1,4 & 0,1 & 0,1 & 1 & 1 & 0,2 \\ 10,9 & 7,9 & 10,9 & 7,9 & 0,7 & 0,7 & 5,7 & 5,7 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Кількість кроків, які потрібні системі для першого досягнення стану j за умови виходу із стану i. Позначимо цю випадкову величину через X_{ij}. Нехай далі $M = (M_{ij})$, де $M_{ij} = M[X_{ij}]$ є середній час до першого попадання із стану i у стан j.

Величини M_{ij} можна визначити із наступного рівняння:

$$M_{ij} = \sum_{k \neq j} P_{ij}\left(Mk_{ij} + 1\right) + P_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{13}$$

Діагональні елементи матриці M (кількість кроків, які потрібні системі для першого повернення у стан i) можна знайти, використовуючи стаціонарний розподіл ймовірностей станів системи π. Отримуємо:

$$R_j := \frac{1}{\pi_j}, \quad R^T = (4,7 \;\; 6,5 \;\; 4,7 \;\; 6,5 \;\; 75,7 \;\; 75,7 \;\; 9,1 \;\; 9,1 \;\; 51,4).$$

Для ергодичних марковських ланцюгів М визначається за формулою

$$M := (I - Z + E \cdot Zl) \cdot D,$$

де $D = (D_{ij})$ і $D_{ij} = 0$ для $i \neq j$, $D_{ii} = 1/\pi_i$.

Знаходження розв'язку для матриці M можна здійснити, застосовуючи фундаментальну матрицю для ергодичних марковських ланцюгів [1]:

$$\Pi_{i,j} := \text{if}(j = i, \pi_i, 0), \quad Z := \lfloor I - (p - \Pi) \rfloor^{-1}, \quad E_{i,j} := 1 \quad Z := \lfloor I - (p - E \cdot \Pi) \rfloor^{-1},$$

$$Zl_{i,j} := \text{if}(i = j, Z_{i,j}, 0), \quad D := \text{if}(i = j, 1/\pi_i, 0), \tag{14}$$

де матриця П є матриця, у якій діагональними елементами є π_i, а усі інші дорівнюють 0.

$$M = \begin{pmatrix} 4,7 & 7,1 & 4,4 & 8,6 & 119,7 & 122,7 & 6,7 & 10,5 & 54,2 \\ 6 & 6,5 & 1,7 & 8,7 & 124,3 & 119,7 & 012 & 8 & 55,7 \\ 4,4 & 8,6 & 4,7 & 7,1 & 122,7 & 119,7 & 10,5 & 6,7 & 54,2 \\ 1,7 & 8,7 & 6 & 6,5 & 119,7 & 124,3 & 8 & 12 & 55,7 \\ 6,1 & 11,4 & 5,7 & 7 & 75,7 & 124,2 & 2,3 & 11,5 & 52,6 \\ 5,7 & 7 & 6,1 & 11,4 & 124,2 & 75,7 & 11,5 & 2,3 & 52,6 \\ 4,8 & 10 & 4 & 6 & 113,5 & 122,5 & 9,1 & 9,8 & 50,6 \\ 4 & 6 & 4,8 & 10 & 122,5 & 113,5 & 9,8 & 9,1 & 50,6 \\ 5,4 & 9 & 5,4 & 9 & 119 & 119 & 5,9 & 5,9 & 51,4 \end{pmatrix}.$$

5) Середнє квадратичне відхилення числа кроків до першого повернення у стан Sl_i

$$ZM_{i,j} := \text{if}(i = jZ_{ij} \cdot M_{ij}, 0), \quad Dl := M \cdot (2 \cdot Zl \cdot D - I) + 2 \cdot [Z \cdot M - E \cdot (ZM)],$$

$$Sl_i := \sqrt{Dl_{i,i}}, \quad Sl^T = (6,2 \;\; 9,5 \;\; 6,2 \;\; 69,5 \;\; 134 \;\; 134 \;\; 12,3 \;\; 12,3 \;\; 73,9).$$

6) Іншою корисною характеристикою є кількість відновлень. Позначимо через $N_{ij}(n)$ кількість попадань у стан j за n кроків, якщо процес починається із стану i. Нехай $a_{ij}(n) = M[N_{ij}(n)]$ є математичне сподівання величини $N_{ij}(n)$. У теорії марковських процесів встановлено факт, що якщо матриця P є ергодичною, то

$$\text{а) } \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_{ij}(n)}{n} = \pi_j, \quad \text{б) } (a_{ij}(n) - n\pi_i) \to \pi(Z - \Pi) \text{ при } n \to \infty$$

$$\pi^T \cdot (Z - \Pi) = (0,194 \;\; 0,11 \;\; 0,194 \;\; 0,11 \;\; 0,004 \;\; 0,004 \;\; 0,096 \;\; 0,096 \;\; 0,002).$$

Таким чином, математичне сподівання кількості попадань у стан j за n кроків, якщо процес починається із стану i, дорівнює

$$\alpha := \pi^T \cdot (Z - \Pi) + n \cdot \pi^T, \quad \alpha = (2,1 \;\; 1,5 \;\; 2,1 \;\; 1,5 \;\; 0,1 \;\; 0,1 \;\; 1,1 \;\; 1,1 \;\; 0,2).$$

Розглянемо тепер часові характеристики досліджуваної системи, що описується напівмарковським процесом.

Можна записати функції розподілів часу перебування системи у станах i ($i = 1,\ldots,n$) [1]:

$$F_1(t) = F_3(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ \ 0 \le t < t_0; \qquad F_2(t) = F_4(t) = 1 - e^{-\mu t},\ \ 0 \le t < \tau;$$
$$F_5(t) = F_6(t) = 1 - e^{-\mu t},\ \ 0 \le t < \tau; \qquad F_7(t) = F_8(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ \ t \ge t_0;$$
$$F_9(t) = 1 - e^{-\nu t},\ \ t \ge 0 \tag{15}$$

і їх середні значення

$$\mu_1 = \mu_3 = uF_1(t_0), \quad \mu_2 = \mu_4 = \tau F_2(\tau), \quad \mu_5 = \mu_6 = \tau F_2(\tau),$$
$$\mu_7 = \mu_8 = uF_1(t_0), \quad \mu_9 = \frac{vF_3(t_0)}{2}. \tag{16}$$

Алгоритм у Mathcad визначення характеристик системи

1. Середні значення часу перебування системи у станах i ($i = 1,\ldots,n$)

$$\mu_1 := u\cdot F_1(t_0) \quad \mu_3 := u\cdot F_1(t_0) \quad \mu_2 := \tau\cdot F_2(\tau) \quad \mu_4 := \tau\cdot F_2(\tau) \quad \mu_5 := \tau\cdot F_2(\tau) \quad \mu_6 := \tau\cdot F_2(\tau)$$

$$\mu_7 := u\cdot F_1(t_0) \quad \mu_8 := u\cdot F_1(t_0) \quad \mu_9 := \frac{vF_3(t_0)}{2},$$

$$\mu^T = (18{,}9\ \ 0{,}6\ \ 18{,}9\ \ 0{,}6\ \ 0{,}6\ \ 0{,}6\ \ 18{,}9\ \ 18{,}9\ \ 6{,}2).$$

Параметри розподілів часу перебування у станах

$$\theta := 1/\mu \quad \theta^T = (0{,}053\ \ 1{,}582\ \ 0{,}053\ \ 1{,}582\ \ 1{,}582\ \ 1{,}582\ \ 0{,}053\ \ 0{,}053\ \ 0{,}161).$$

Функції розподілів і щільності розподілів часу перебування у станах i

$$G(i,t) := \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\left(1 - e^{-\theta_j\cdot t}\right) \quad g(i,t) := \frac{d}{dt}G(i,t). \tag{17}$$

2. Середні значення часу для розподілів $G(i,t)$

$$\mathrm{inf} := 300 \quad h_i := \int_0^{\mathrm{inf}} t\cdot g(i,t)\,dt \quad h^{\mathrm{T}} = (13{,}4\ \ 12{,}2\ \ 13{,}4\ \ 12{,}2\ \ 11{,}5\ \ 11{,}5\ \ 11\ \ 11\ \ 18{,}9).$$

Із значень h видно, що більші середні є для станів повної працездатності комп'ютерів 1, 3, 9, менші — для станів 5-8.

3. Використовуючи стаціонарні ймовірності станів π_k і знайдені величини h_k визначимо середній час v_i перебування системи у станах i

$$v_i := \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{if}\left(k \ne i, p_{i,k}\cdot h_k, 0\right)\right) + \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\cdot h_k$$

$$v^T = (20{,}1\ \ 21{,}4\ \ 20{,}1\ \ 21{,}4\ \ 18{,}5\ \ 18{,}5\ \ 25{,}6\ \ 25{,}6\ \ 21{,}9).$$

Значення вектора v показують, що більші його значення є для станів ремонту і працездатності комп'ютерів 7-9, менші — для станів профілактики і ремонту 5, 6.

4. Середній час повернення у стани i

$$l_i := \frac{1}{\pi_i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\pi_k\cdot u_k \quad l^T = (59\ \ 81\ \ 59\ \ 81\ \ 947{,}1\ \ 947{,}1\ \ 113{,}3\ \ 113{,}3\ \ 643{,}6).$$

Значення вектора l показують, що менші значення є для станів повної працездатності 1,3 і працездатності та профілактики 2,4 працездатності та ремонту 7,8 більші — для станів ремонту і профілактики і стану повного ремонту 5, 6, 9.

5. Середнє квадратичне відхилення часу перебування у станах i. Другий його момент дорівнює

$$l2_i := \frac{1}{\pi_i}\cdot\left[1 + 2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{if}\left(k \ne i, \pi_k\cdot v_k, 0\right)\right)\right].$$

За формулою дисперсії маємо

$$D := l2 - u^2 \quad S := \sqrt{D} \quad S^T = (4{,}9\ \ 8{,}9\ \ 4{,}9\ \ 8{,}9\ \ 56{,}5\ \ 56{,}5\ \ 13{,}3\ \ 13{,}3\ \ 46).$$

6. Визначимо найбільш важливу характеристику для системи — середній час до попадання у стан повної відмови (у стан поглинання марковського ланцюга) 9 ($A_r B_r$)

$$i := 1..n-1 \quad T_i := \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}\cdot\mu_j$$

$$T^T = (686{,}6\ \ 686{,}1\ \ 686{,}6\ \ 686{,}1\ \ 644{,}3\ \ 644{,}3\ \ 639\ \ 639)\ \text{годин},$$
$$t := T/24 \quad t^T = (28{,}6\ \ 28{,}6\ \ 28{,}6\ \ 28{,}6\ \ 26{,}8\ \ 26{,}8\ \ 26{,}6\ \ 26{,}6)\ \text{днів}.$$

Таким чином, більший середній час попадання у стан повної відмови є для станів 1-4, менший — для станів 5-9.

Середнє значення величин T_i

$$T_s := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} t_i \quad T_s = 27{,}7 \text{ днів}.$$

Значення T_i ($i = 1,\ldots,4$) показують, скільки днів у середньому працюють комп'ютери у станах i, T_i ($i = 5{,}6$) – скільки днів відбуваються профілактики і ремонти одного із комп'ютерів, T_i ($i = 7{,}8$) — скільки днів один із комп'ютерів працює, а другий ремонтується, T_i ($i = 9$) — скільки днів ремонтуються обидва комп'ютери.

Висновки

Розроблена математична модель дослідження надійності складних динамічних систем надає можливість досліджувати широкий клас таких систем і визначати їх функціональні характеристики, на основі яких можна встановлювати оптимальні правила їх обслуговування для забезпечення надійності і зменшення втрат часу і коштів від їх простоїв.

Список використаної літератури

*1. **Barlow R. E., Proschan F.** Mathematical Theory of Reliability. SIAM, 1987. 274 p.*

*2. **Barlow R. E.** Engineering Reliability. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998. 220 p.*

*3. **Rausand M., Barros A., Hoyland A.** System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications. 3rd edition. Wiley, 2021. 864 p.*

*4. **Navarro J.** Introduction to System Reliability Theory. New York: Springer, 2021. 181 p.*

*5. **Epstein B., Weissman I.** Mathematical Models for Systems Reliability. Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2008. 257 p.*

*6. **Аль-Амморі А. Н.** Елементи теорії надійності та інформаційної безпеки комп'ютеризованих систем / Навчальний посібник. К.: НТУ, 2024. 282 с.*

*7. **Методи** та засоби захисту інформації / А. Н. Аль-Амморі, М. М. Дехтяр, Р. М. Іщенко, А. Є. Клочан // Системи управління, навігації та зв'язку. 2024. № 1. С. 38–44.*

A. Al-Ammouri, R. Ishchenko, A. Klochan, O. Shkurko, H. Al-Ammori

INFORMATION TECHNOLOGY STOCHASTIC RELIABILITY MODEL OF COMPUTERIZED SYSTEMS FOR INFORMATION PROTECTION

Developed a stochastic model of a complex dynamic system, which can be in one of the possible conditions that characterize its performance. Application of the theory of Markov random processes makes it possible to determine important characteristics of reliability of such systems. The work takes into account elements of information security and information protection from the point of view of functional reliability.

The calculation technology using Mathcad tools was developed and the corresponding calculations were carried out.

Keywords: information technology; information protection; information reliability; optimization; reliability; algorithm.