

УДК 621.391+519.711

DOI: 10.31673/2412-9070.2025.042501

Д. О. КРОЩЕНКО, аспірант,

ORCID: 0009-0005-9853-4362

Український державний університет залізничного транспорту, Харків

МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ ГРАФОВОЇ СТРУКТУРИ КОДІВ НА ОСНОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАБІ

Зростання обсягів інформації, яка передається по каналах зв'язку, веде до значного ускладнення умов передавання даних. Ця проблема, зазвичай, спричинена наявністю шумів та різних видів спотворень. Показано, що завадостійке кодування є дуже важливим для забезпечення надійності сучасних систем зв'язку. Розглянуто фонтанні коди, які являються ефективним рішенням для передавання даних у мережних середовищах із високою ймовірністю втрат пакетів. Дані коди мають можливість адаптації до різних умов передавання без необхідності запитів на повторне передавання. Продemonстровано принципи кодування і декодування інформації кодами на основі перетворення Лабі та представлено переваги таких кодів порівняно з традиційними канальними кодами. Було представлено структуру графу кодів Лабі, а також наведено основні проблеми та особливості графової структури. Визначено, що ефективність процесу декодування залежить від структури графа зв'язків. Після проведеного аналізу запропоновано метод оптимізації графової структури, що є важливим кроком у підвищенні їхньої ефективності. Розглянуто особливості та основні етапи запропонованого методу оптимізації кодів на основі перетворення Лабі. Також було показано візуалізацію та проведено аналіз двох графів, а саме неоптимального графу коду Лабі та графу після проведення оптимізації. Представлено порівняльну таблицю з результатами до та після проведення оптимізації. Отримані результати демонструють, що оптимізація графової структури в кодах Лабі є ключовим фактором, який дає змогу покращити швидкість та надійність декодування, зменшити обсяг необхідних додаткових символів, ефективно виконувати покриття вихідних символів, зменшувати помилки при відновленні даних. У результаті проведеного дослідження визначено, що використання запропонованого методу оптимізації графової структури дає можливість зниження обчислювальної складності кодам на основі перетворення Лабі та дозволяє їм працювати швидко та надійно.

Ключові слова: фонтанні коди; коди Лабі; дводольний граф; кодування; декодування; оптимізація; кодові символи; передавання даних; інформація; канал зв'язку.

Вступ

Зростання обсягів інформації, яка передається по каналах зв'язку, кількості та складності мережних засобів, які при цьому застосовуються, веде до значного ускладнення умов передавання даних. Ця проблема, зазвичай, спричинена зростанням шумів, а також різних можливих небажаних спотворень в елементах та пристроях, які входять до складу систем зв'язку. Тому, захист повідомлень від різного роду завад, спотворень вирішується за допомогою їх кодування [1]. Завадостійке кодування є критично важливим для забезпечення надійності сучасних систем зв'язку та зберігання даних. Вибір конкретного методу кодування залежить від вимог до продуктивності, обчислювальних ресурсів та умов каналу передавання даних.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Фонтанні коди є ефективним рішенням для передавання даних у середовищах із високою ймовірністю втрат пакетів. Дані коди являються класом кодів корекції стирання, які можуть генерувати нескінченну кількість закодованих символів як тільки буде отримано достатню кількість пакетів, можна відновити вихідні дані. Основною перевагою фонтанних кодів є можливість адаптації до різних умов передавання без необхідності запитів на повторне передавання. Цей вид кодування дозволяє будь-якій кілько-

сті різнорідних клієнтів отримувати великі обсяги даних з оптимальною ефективністю у вибраний ними час [2]. Коди на основі перетворення Лабі є першою реалізацією таких кодів. У дослідженні [3] було проаналізовано специфічний клас безшвидкісних кодів, а саме коди Лабі з нерівним часом відновлення, де представлена модифікація, яка забезпечує значне покращення продуктивності декодування та здатна значно зменшити надлишковість у даних з нижчим пріоритетом. У статті [4] пропонується в якості пошукового механізму використання узагальнених біоінспірованих процедур, які включають в себе популяційні, еволюційні та інші процедури. В [5] представлено метод передавання для бездротових сенсорних мереж з використанням кодів Лабі, як кодів захисту від підслуховування та запропоновано метод переупорядкування матриці кодування для зменшення ймовірності того, що вузол підслуховування завершить декодування раніше за вузол призначення у кожному декодуванні. У дослідженні [6] акцентується увага на методі інактиваційного декодування для заданого коду. В роботі [7] показано процес декодування, який має назву алгоритм повного рангового декодування, при цьому зберігається оригінальний процес кодування та декодування у максимально можливому степені, щоб зберегти перевагу низької складності кодів Лабі.

Таким чином, актуальною задачею є підвищення ефективності процедури декодування кодів Лабі за допомогою оптимізації графової структури.

Мета дослідження. Метою дослідження є оптимізація графової структури для забезпечення надійності та підвищення швидкості відновлення втрачених пакетів у телекомунікаційних мережах із втратами.

Результати дослідження

Коди Лабі спеціально розроблені для каналів стирання і забезпечення надійного передавання даних. Перевага таких кодів порівняно з традиційними каналними кодами полягає в тому, що в сценарії передавання даних зі стираннями пакетів (наприклад, в одноадресному або багатоадресному передаванні через мережі зв'язку) кількість повторних передавань для ідентифікації відсутніх пакетів даних значно зменшується. Це пов'язано з властивістю безшвидкісності таких кодів, де, в принципі, з інформаційного блоку можна отримати довільну кількість кодів символів. Таким чином, приймачу потрібно лише підтвердити успішне декодування інформаційного слова після отримання достатньої кількості кодових символів [8].

Коди Лабі базуються на графовій моделі, де закодовані символи формуються шляхом комбінації вихідних символів. Процес генерації кодового символу концептуально легко описати:

- випадково вибрати степінь d кодового символу з розподілу степенів;
- рівномірно випадковим чином вибрати d різних вхідних символів як сусідів кодового символу;
- значення кодового символу є операцією XOR для d сусідів [8, 9].

Під час процесу декодування декодер знає степінь кожного кодового символу та набір сусідів, пов'язаних з ним. Декодування здійснюється через поступове виключення відомих значень, що аналогічно розв'язанню системи лінійних рівнянь. Ефективність цього процесу залежить від структури графа зв'язків, тому оптимізація графової структури є критичною для швидкого і точного декодування.

1. Структура графа в кодах Лабі

Повідомлення при передаванні являється потоком даних, який складається з бітів. Цей потік даних розділений на K вихідних символів, представлених як $M=(M_1, M_2, M_3, \dots, M_K)$, де довжина символу однакова для всіх K вихідних символів. Кодер Лабі приймає ці K вихідних символів як вхідні дані та створює нескінченний потік закодованих символів або кодових слів за допомогою алгоритму кодування. Цей алгоритм генерує закодований символ C_i , виконуючи операції XOR над випадково та рівномірно вибраними вихідними символами d_i , де d_i — випадково вибраний степінь на основі розподілу степенів. Степінь d_i визначає кількість унікальних вихідних символів, які можуть бути обрані як сусідні для побудови закодованого символу C_i [10]. Тому, в кодах на основі перетворення Лабі, зв'язок між вихідними символами та закодованими символами можна представити як дводольний граф, де **одна частина графа** – почат-

кові дані (вихідні символи), M ; друга частина графа – закодовані символи, що є сумами вихідних символів, C .

Декодування починається з символів, які мають **ступінь 1**, тобто з'єднані лише з одним вихідним символом. Таким чином, розглянувши принцип побудови завадостійких кодів Лабі, можна виділити такі основні проблеми графового представлення:

1. Ізольовані вершини – вихідні символи, які не підключені до жодного закодованого символу.
2. Вершини з високим ступенем – ускладнюють розв'язання системи рівнянь.
3. Нерівномірний розподіл зв'язків – може спричинити недостатнє охоплення вихідних символів.

2. Оптимізація структури графа

З розглянутого вище слідує, що для **оптимізації структури графа та ефективного використання декодування** необхідно створити **граф із добре збалансованим розподілом зв'язків**. Виходячи з цього, нижче представлено основні етапи оптимізації.

3. Обмеження використання символів із високим ступенем

Якщо ступінь закодованого символу буде дуже високий ($>10-15$) – це ускладнює розв'язання рівнянь.

Якщо встановити верхню межу d_{max} , наприклад, 10 — це дасть змогу поліпшити продуктивність. Обмеження ступеня до $d_{max}=10$ означає, що кожен кодовий символ утворюється максимум з 10 вхідних символів, що знижує **середній час обробки** одного символу. Таке обмеження дозволяє використовувати фіксовану і керовану структуру для зберігання символів, що знижує **ресурси пульсації (пам'яті)** та допомагає уникнути неефективної надмірної складності.

Приклад: кодові символи без обмеження ступеня можуть мати середній ступінь 40, а це в свою чергу 40 XOR-операцій, що призводить до значного зростання обчислювального навантаження. Кодові символи, які будуть мати обмеження $d_{max}=10$, можуть мати середній ступінь $\approx 3-6$, а це приблизно у 5 разів менше операцій XOR, що дає можливість знизити обчислювальне навантаження.

Використання рівномірного покриття вхідних символів

Щоб гарантувати, що кожен з K вхідних символів буде покритий близько однаковою кількістю разів серед C закодованих символів, вводимо **матрицю покриття** A_i , де A_i — кількість разів, коли вхідний символ i було обрано у якості сусіда при генерації закодованих символів.

Після формування A_i ми можемо накласти обмеження. Мінімум $A_i \geq M_{min}$, щоб жоден вхідний символ не залишився непокритим. Максимум $A_i \leq M_{max}$, щоб не було надмірного навантаження на окремі символи. Це гарантує рівномірний розподіл зв'язків між символами. Знижує кількість ітерацій декодування та підвищує ймовірність успіху.

Використання адаптації графової структури за результатами моделювання

- У процесі декодування можна виявити, які вихідні символи залишаються не декодованими.
- У реальних системах можна динамічно додавати додаткові закодовані символи, що покращує розподіл графа.

Розглянемо випадок неоптимального графа рис.1 із **6 блоками початкових даних M** і **8 закодованими символами C** .

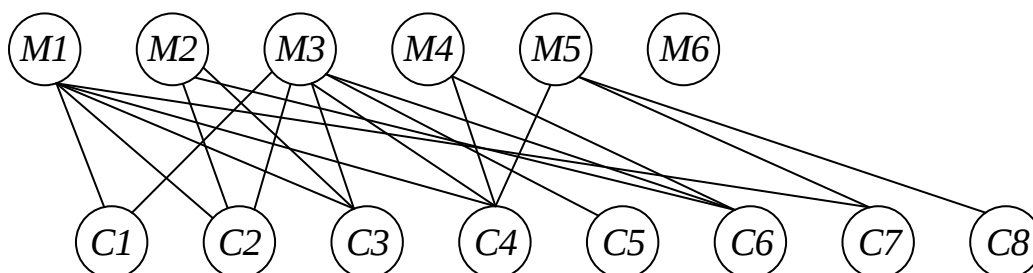


Рис. 1. Неоптимальний граф коду Лабі

Аналіз неоптимального графа

1. Ізольовані вершини. Блок початкових даних $M6$ не підключений до жодного закодового символу, тому декодування може провалитися.

2. Вершини з високим степенем. Деякі вузли такі як $M1$, $M3$ мають високий степінь, що ускладнює розв'язання рівнянь.

3. Нерівномірний розподіл зв'язків. Всі блоки початкових даних по-різному підключені і мають різну кількість зв'язків, що спричиняє недостатнє та нерівномірне охоплення вихідних символів.

Представимо візуалізацію оптимізованого графу рис.2 також із **6 блоками початкових даних** і **8 закодованими символами** з використанням розглянутих вище кроків та виконаємо його аналіз.

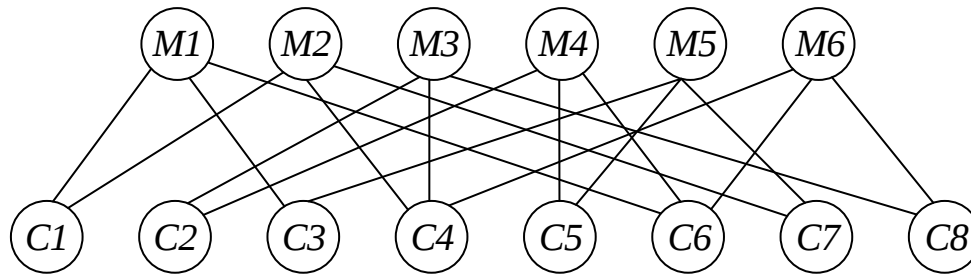


Рис. 2. Оптимізований граф коду Лабі

Аналіз оптимізованого графа

1. Рівномірний розподіл зв'язків. Немає вузлів із дуже великою кількістю з'єднань. Кожен блок початкових даних M зв'язаний із кількома закодованими символами C . Це зменшує ризик втрати інформації та підвищує ймовірність успішного декодування.

2. Різні ступені для закодованих символів. Кожен вихідний символ пов'язаний мінімум із 3-4 кодовими символами. Деякі закодовані символи мають 2 вхідні з'єднання - це відповідає оптимізованому розподілу ступенів, де частина символів має менший ступінь для швидкого декодування, а інші допомагають відновленню складніших частин.

3. Глибина зв'язків. Використання різних комбінацій початкових даних M -символів дозволяє уникнути залежності від окремих вузлів. Декодування стає стабільнішим.

Розглянемо чисельні результати (таблиця) з використанням запропонованого підходу і солітонового розподілу ступенів.

Кількість вхідних символів $K=100$.

Кількість закодованих символів (із надмірністю) $n=130$.

Надмірність $\epsilon=0,3$.

Степінь без обмеження $d_{max}=K$ та обмеження степеня $d_{max}=10$.

Динаміка змін

Параметр	До оптимізації	Після оптимізації
Середній степінь d	$\approx 5,18$	$\approx 2,75$
Обчислювальна складність	673	358
Затримка	673	358
Покриття	Не всі символи покриті	Всі символи покриті

Запровадження **обмеження степеня** та **рівномірного покриття** в кодах на основі перетворення Лабі дозволяє досягти **суттєвого прискорення** операцій кодування /декодування ($\approx 45\%$ вигрaш) та зниження обчислювальної складності. Як результат, використання оптимізованого графу коду Лабі покращує декодування, адже використання графа із збалансованою структурою дозволяє швидше знайти лінійно незалежні рівняння для вирішення системи. Якщо один символ буде втрачений - інші можуть допомогти його відновити через просте

обчислення за допомогою операції XOR. Тому, цей метод покращує швидкість не впливаючи на надійність кодів Лабі та робить їх ефективнішими при використанні в мережах із втратами.

Висновки

Оптимізована структура графа дозволяє кодам на основі перетворення Лабі значно покращити стартові умови для декодування, знизити кількість необхідних надлишкових символів, підвищити ймовірність повного декодування при малих довжинах блоків, забезпечити рівномірне навантаження на всі вхідні вузли. Використання запропонованого методу підвищить ефективність алгоритму декодування кодів Лабі, який дозволить швидко і надійно відновлювати втрачені пакети, що особливо важливо для каналів зв'язку з втратами та безпроводових мережних середовищ.

Список літератури

1. Бондаренко І.М. *Коди та кодування: навч. посіб.* / І. М. Бондаренко, А.П. Глушко, О.М. Меньков – Харків: ХІ ВПС, 2003. – 116 с.
2. J.w. Byers. A Digital Fountain Approach to Reliable Distribution of Bulk Data / J.w. Byers, M. Luby, M. Mitzenmachert, A. Rege // ACM SIGCOMM Computer Communication Review.–1998.–Vol. 28, no. 4.– P. 56-67.
3. Jesper H. Sorensen. Analysis of LT Codes with Unequal Recovery Time / Jesper H. Sorensen, Petar Popovski, Jan Ostergaard // Aalborg University, Department of Electronic Systems, Article April 2012.
4. Штомпель Н. А. Біоінспірований метод оптимізації кодів на основі перетворення Лабі / Н. А. Штомпель // Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. –2016.– №2 (23) – С. 153-157.
5. Hang Zhang. LT Codes with Double Encoding Matrix Reorder Physical Layer Secure Transmission / Hang Zhang, Fanglin Niu, Ling Yu, Si Zhang // Journal of Sensors. –2022.–Vol. 22,no. 2.– P. 1-12.
6. Blasco F. L. LT Code Design for Inactivation Decoding / F. L. Blasco, G. Liva, G. Bauch // Conference: IEEE Information Theory Workshop 2014. Hobart, Australia.
7. Feng Lu. LT Codes Decoding: Design and Analysis / Lu Feng, Chuan Heng Foh, Jianfei Cai, Liang-Tien Chia // Conference: Information Theory. ISIT 2009. IEEE International Symposium on June 28 - July 3, 2009 / ISIT – Seoul, Korea, 2009 – P. 2492-2496.
8. Srinath Puducheri. On the Performance of Distributed LT Codes / Srinath Puducheri, Jorg Kliewer, Thomas E. Fuja // Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA.
9. Luby M. LT Codes / M. Luby // Proceedings of the 43rd Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society, 2002. – P. 271 – 280.
10. Joe Louis Paul I. Throughput and Bit Error Rate Analysis of Luby Transform Codes with Low and Medium Nodal Degree Distributions / I. Joe Louis Paul, S. Radha, J. Raja // American Journal of Applied Sciences –2014.–11 (9) – P. 1584-1593.

D. Kroshchenko

METHOD FOR OPTIMIZING THE GRAPH STRUCTURE OF CODES BASED ON LUBY TRANSFORMATION

The growing volume of information transmitted through communication channels leads to significant complications in data transmission conditions. This issue is typically caused by the presence of noise and various types of distortion. It is shown that error-resilient coding is crucial for ensuring the reliability of modern communication systems. Fountain codes are considered as an effective solution for data transmission in network environments with a high probability of packet loss. These codes are capable of adapting to different transmission conditions without the need for retransmission requests. The principles of encoding and decoding information using codes based on the Luby transformation are demonstrated, along with the advantages of such codes compared to traditional channel codes. The structure of Luby code graphs is presented, and the key problems and characteristics of their graph representation are discussed. It is established that the efficiency of the decoding process

depends on the structure of the connection graph. Based on the conducted analysis, a method for optimizing the graph structure is proposed as a critical step toward enhancing performance. The main features and stages of the proposed optimization method for codes based on the Luby transformation are examined. A visual comparison and analysis of two graphs are provided—namely, the non-optimized Luby code graph and the graph after optimization. A comparative table with results before and after optimization is also presented. The obtained results show that optimizing the graph structure of Luby codes is a key factor in improving decoding speed and reliability, reducing the number of required additional symbols, ensuring effective coverage of input symbols, and minimizing data recovery errors. As a result of the study, it was determined that using the proposed method for graph structure optimization enables a reduction in computational complexity for Luby transform codes and allows them to operate more efficiently and reliably.

Keywords: fountain codes; Luby codes; bipartite graph; encoding; decoding; optimization; code symbols; data transmission; information; communication channel.
