

УДК 330.3:519.86

DOI: 10.31673/2412-9070.2025.061208

С. А. СОЛОМАХА¹, канд. економ. наук, доцент;

ORCID: 0009-0002-8358-8657

О. О. ЯСІНЕЦЬКИЙ², аспірант,

ORCID 0009-0001-8771-4465

¹Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ²Національний технічний університет «Харківський національний університет радіоелектроніки», Харків

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ЕВОЛЮЦІЇ РИНКОВИХ СЕГМЕНТІВ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ CUSP CATASTROPHE

У статті запропоновано математичну модель еволюції ринкових сегментів на основі концепції cusp catastrophe (катастрофи типу «Збірка») з теорії катастроф Рене Тома [5]. Модель формалізує нелінійні переходи між фазами розвитку ринку – від ненасиченого до насиченого стану – через взаємодію трьох чинників: незадоволеного попиту, рівня задоволеності споживачів і конкуренції. Визначено потенціальну функцію, рівняння рівноваги, дискримінант та біфуркаційну поверхню, що окреслює межі фазової стабільності. Показано, що навіть незначні параметричні зміни можуть призвести до стрибкоподібних переходів, аналогічних ринковим колапсам або фазам структурного насичення [2, 3, 4].

Ключові слова: cusp catastrophe; нелінійна динаміка; потенціальна функція; ринковий сегмент; фазові переходи; теорія катастроф; дифузія характеристик.

Вступ

Постановка проблеми. Розвиток соціально-економічних відносин завжди супроводжується нелінійними процесами, де періоди стабільного зростання чергуються з фазами різких змін – кризами, насиченням чи радикальними перетвореннями [8, 10]. Традиційні лінійні моделі, які передбачають поступовий прогрес, часто не можуть пояснити ці злами, адже вони ігнорують складну взаємодію факторів, що визначають поведінку ринку. Натомість реальні економічні системи демонструють динаміку, подібну до фізичних чи біологічних процесів, де невеликі зовнішні впливи здатні спричинити глобальні перебудови [4, 6].

У сучасному економічному середовищі, що швидко змінюється, розуміння нелінійної динаміки еволюції ринкових сегментів є критично важливим для стратегічного планування та управління ризиками. Традиційні економічні моделі, часто засновані на лінійних припущеннях, не здатні адекватно відтворити різкі злами, характерні для сучасних ринків, такі як фінансові крахи, технологічні прориви чи раптові зміни поведінки споживачів. Теорія катастроф, зокрема модель cusp, пропонує потужний інструментарій для аналізу таких дискретних переходів. Інтегруючи концепції з математики, фізики та економіки, цей підхід надає розуміння того, як малі збурення можуть призводити до масштабних реконфігурацій ринку. Ця робота спрямована на розширення застосування cusp catastrophe до еволюції ринкових сегментів, з акцентом на роль дисбалансу попиту-здоволеності та конкурентних тисків. Через детальне математичне формулювання та аналіз, досліджується, як ця модель може прогнозувати та пояснювати ринкові нестабільності.

Важливість цього дослідження полягає у його міждисциплінарному характері, що поєднує теорію катастроф з економічним моделюванням. Хоча теорія катастроф застосовувалася у різних галузях, її використання в економіці обмежене, часто зосереджене на фінансових ринках чи макроекономічних нестабільностях. У поточній роботі теорія катастроф застосовується на набагато нижчому рівні – рівні ринкових сегментів, інтегруючи дифузію характеристик продуктів як ключовий драйвер фазових переходів. Це не тільки збагачує теоретичну базу, але й надає інструмент для прогнозування ринкового насичення та колапсів, що особливо актуально в галузях, таких як технології, автомобілебудування та споживчі товари, де цикли інновацій короткі, а конкуренція жорстка.

Концепція І. Ансоффа [1], яка виділяє чотири основні етапи розвитку економічних систем – масове виробництво, масовий збут, постіндустріальну та інформаційну стадії, – слугує відправною точкою для аналізу. Однак у межах конкретних ринкових сегментів ці етапи не є строго послідовними, а радше утворюють циклічні фази, де баланс між ключовими чинниками визначає траєкторію еволюції. Серед цих чинників особливе місце займають незадоволений попит (D), задоволення споживачів (S) та конкуренція (C). Коли попит значно перевищує пропозицію, система перебуває у фазі зростання; але посилення конкуренції та вирівнювання пропозиції призводить до наближення критичного стану, де навіть незначне збурення може спровокувати перехід до нової фази.

Історичні приклади яскраво ілюструють цю динаміку. Класичним випадком є автомобіль «Модель Т» Генрі Форда: на початку XX століття масове виробництво забезпечило вибухове зростання попиту, але вже через два десятиліття, коли конкуренти скопіювали технології конвеєрної збірки, ринок наситився, змусивши компанію радикально переглянути стратегію. Аналогічно, ринок мобільних телефонів на початку 2000-х років переживав стрімке зростання, доки ключові характеристики – кольоровий дисплей, камера чи Bluetooth – не стали стандартом для всіх виробників. Це призвело до стагнації та падіння прибутковості, відкривши шлях для нової фази – ери смартфонів. У автомобільній галузі подібні процеси спостерігаються з дифузією технологій безпеки, таких як ABS чи ESP, які з ексклюзивних опцій преміум-сегменту перетворилися на універсальний стандарт.

Ці приклади демонструють, що успішні бізнес-моделі можуть зазнати раптового переходу, коли незначні зміни у попиті чи конкуренції призводять до структурної трансформації. Для пояснення такого явища у цій роботі використано математичний апарат *cusp catastrophe*, який дозволяє моделювати нелінійні переходи між стійкими фазами ринку, враховуючи взаємодію ключових чинників [5, 6, 7].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія катастроф, розроблена Рене Томом у 1970-х роках, знайшла застосування в різних дисциплінах, включаючи економіку, де вона моделює раптові зміни в поведінці систем [5]. Ранні роботи Зімана досліджували її потенціал у соціальних науках, включаючи економічні флуктуації [7]. В економіці теорія набула поширення у 1980-1990-х роках, з Варіаном, що надав статистичні аналізи *cusp*-моделі для економічних застосувань [6]. Огляд Россера висвітлює підйом і наступний спад популярності теорії катастроф в економіці, приписуючи це викликам емпіричної валідації, але відзначаючи її тривалу цінність для розуміння нелінійної динаміки [4].

Специфічні застосування до ринкової динаміки включають використання Баруніком і Восврдою стохастичних *cusp*-моделей для пояснення крахів фондового ринку, демонструючи кращу пояснення порівняно з традиційними моделями [2]. Аналогічно, Россер застосовував її до економічних біфуркацій, показуючи, як малі зміни параметрів можуть призводити до драматичних зламів [4]. Недавно, Ду і Гоуз адаптували *cusp catastrophe* до конкуренції в онлайн-ритейлі, моделюючи нелінійні переходи, керовані конкурентними факторами [3]. Ці дослідження підкреслюють здатність моделі фіксувати гістерезис і бістабільність у ринках, де системи можуть «застрягати» в застарілих станах попри зміну умов.

У контексті ринкових сегментів дифузія характеристик – де інноваційні риси стають стандартизованими – узгоджується з акцентом теорії катастроф на переходах, керованих параметрами. Однак прогалини залишаються в застосуванні моделі до конкретних сегментів, таких як споживча електроніка чи автомобілебудування, де емпіричні дані можуть валідувати прогнози. Ця робота спирається на ці основи, уточнюючи *cusp*-модель для еволюції ринкових сегментів та інтегруючи реальні приклади для поєднання теорії та практики.

Метою статті є формалізація гіпотези про фазову еволюцію ринкових сегментів на основі моделі *cusp catastrophe* (катастрофи типу «Збірка») з теорії катастроф Рене Тома, що дозволяє описати раптові переходи між фазами росту та насичення ринку.

Дослідження спрямоване на створення математичного інструментарію для аналізу нелінійної динаміки ринку через взаємодію трьох ключових чинників – незадоволеного попиту,

задоволеності споживачів і рівня конкуренції – та визначення умов стійкості фаз розвитку ринку.

Для досягнення цієї мети вирішуються такі завдання:

- проаналізувати теоретичні основи теорії катастроф і підходи до моделювання ринкових нестабільностей;
- визначити роль дифузії характеристик у формуванні фазових переходів і ринкового насичення;
- побудувати математичну модель на основі потенціальної функції *cusp catastrophe* та визначити рівняння рівноваги й дискримінант;
- виконати геометричний та динамічний аналіз моделі для ідентифікації областей стійкості та критичних точок;
- продемонструвати застосування моделі на прикладі еволюції ринку смартфонів для валідації теоретичних висновків.

Основна частина

Вибір моделі. Модель *cusp catastrophe* є найпростішою серед нелінійних моделей [5], які дозволяють дискретні переходи між станами. Її перевага полягає в тому, що вона відтворює бістабільність – існування двох стійких рівноваг – і гістерезис, коли система не відразу реагує на зміни параметрів. Це робить модель ідеальною для опису ринкових сегментів, де плавні еволюційні процеси можуть перерватися раптовим стрибком, аналогічним до фазового переходу в фізиці.

Інші форми катастроф, такі як *swallowtail* чи *butterfly*, вимагають більшої кількості змінних і складніших умов стійкості, що ускладнює їх застосування в економічному аналізі. Тому *cusp catastrophe* обрано як мінімальну, але повну форму, яка дозволяє відтворити ключові риси ринкової динаміки: від фази зростання з високим незадоволеним попитом до насичення з посиленою конкуренцією.

Змінні та параметри. Модель описує ринок через три величини: рівень насичення ринку $x \in [0,1]$, параметр $a \sim -C$, де C – конкуренція, та параметр $b \sim (D - S)$, де D – незадоволений попит, а S – задоволення споживачів. Параметр a відображає внутрішній стан конкурентного середовища, тоді як b характеризує зовнішній ринковий тиск, спричинений співвідношенням між попитом і задоволенням. Такий вибір параметрів дозволяє пов'язати модель з реальними ринковими процесами, де зростання конкуренції робить систему більш чутливою до змін, а дисбаланс між попитом і задоволенням визначає напрям еволюції.

Роль дифузії характеристик у фазових переходах. Одним із ключових механізмів, що визначають еволюцію ринку, є дифузія характеристик – процес поширення технологічних, функціональних або споживчих властивостей продуктів між конкурентами. На ранніх етапах розвитку ринкових сегментів кожен виробник пропонує унікальні характеристики, що створює значну різницю між незадоволеним попитом D і рівнем задоволення споживачів S . Ця різниця стає рушійною силою зростання, стимулюючи інновації та розширення ринку.

Згодом, коли інновації копіюються конкурентами, відбувається вирівнювання ринкових позицій, а конкуренція C різко зростає. Типові приклади дифузії характеристик спостерігаються у високотехнологічних галузях: у смартфонах – це технології багатокамерних систем, біометричної автентифікації чи швидкої зарядки, що початково були унікальними для окремих брендів і швидко стали стандартом для всіх сегментів. Аналогічно, в автомобілях функції ABS, ESP чи адаптивного круїз-контролю, колись ексклюзивні для преміум-брендів, нині стали нормою навіть у бюджетних моделях. У електроніці та побутовій техніці подібні процеси відбуваються з енергоефективністю, бездротовими інтерфейсами та смарт-керуванням – характеристиками, що поступово дифундують через увесь ринок.

Унаслідок дифузії унікальні властивості втрачають конкурентну силу, а ринок переходить від якісної конкуренції до цінової. Це створює передумови до насичення – тобто до того стану, який у моделі *cusp catastrophe* відповідає переходу від нижнього мінімуму потенціалу (фаза

росту) до верхнього (фаза стабілізації або спаду). Дифузія характеристик, таким чином, не є самою катастрофою, але є механізмом, що штовхає систему до неї, роблячи ринок чутливим до найменших змін зовнішніх параметрів. Це підкреслює важливість моделювання стійкості у розумінні [9].

Математичне формулювання. Потенціальна функція моделі визначається як:

$$V(x; a, b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx. \quad (1)$$

Три члени цієї функції відіграють різні ролі в описі ринкової динаміки: x^4 обмежує систему, створюючи енергетичні бар'єри для надмірного зростання; ax^2 формує кривизну поверхні, визначаючи кількість можливих мінімумів і таким чином кількість стабільних фаз; bx створює асиметрію, що задає напрям зсуву рівноваги в залежності від балансу попиту та задоволеності. Висновок тут очевидний: така структура функції дозволяє моделі гнучко відображати ринкові реалії, де конкуренція (через a) посилює бістабільність, а дисбаланс попиту (через b) визначає домінуючу фазу розвитку.

Рівновага досягається, коли:

$$\frac{dV}{dx} = x^3 + ax + b = 0. \quad (2)$$

Кількість коренів цього рівняння залежить від дискримінанта:

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2. \quad (3)$$

При $\Delta > 0$ існує одна рівновага, що відповідає стабільній фазі ринку – чи то зростання, чи насичення. При $\Delta = 0$ система перебуває в критичному стані, де будь-яке збурення може ініціювати перехід. Нарешті, при $\Delta < 0$ виникають три рівноваги: дві стійкі (нижня – фаза зростання, верхня – фаза насичення) та одна нестійка (перехідна точка). Цей висновок підкреслює, що дискримінант не лише визначає кількість станів, але й слугує індикатором вразливості ринку: негативне значення Δ сигналізує про потенціал для катастрофічних змін, як у випадках дифузії характеристик, коли конкуренція швидко ескалує (рис. 1).

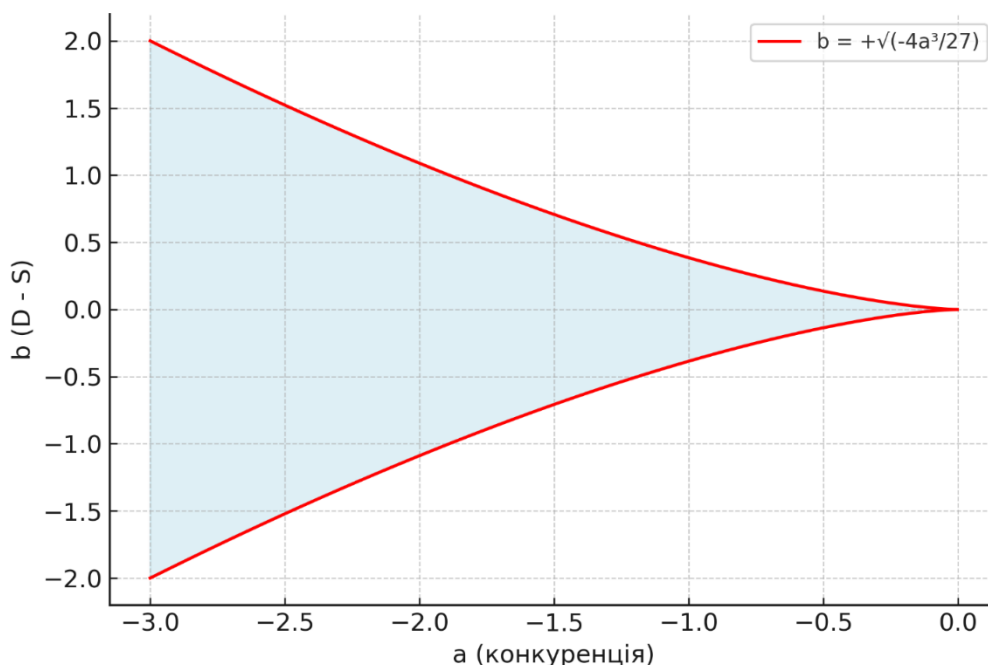
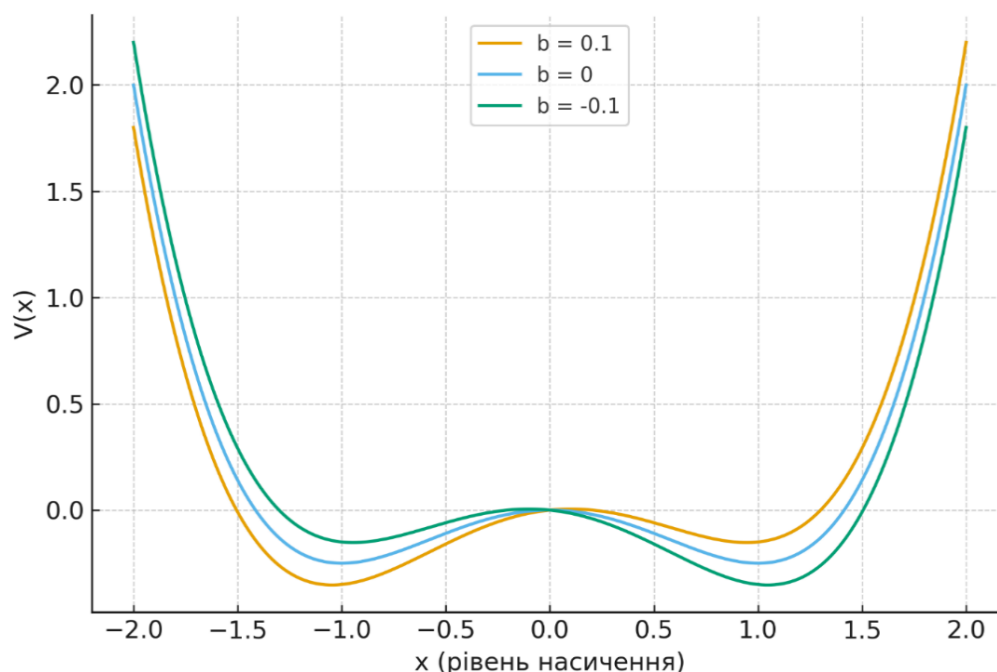


Рис. 1. Біфуркаційна крива cusp catastrophe

Аналіз потенціальної функції. На рис. 2 зображено форму потенціалу при різних значеннях параметра b .

Рис. 2. Потенціальна функція $V(x;a,b)$ при $a = -1$

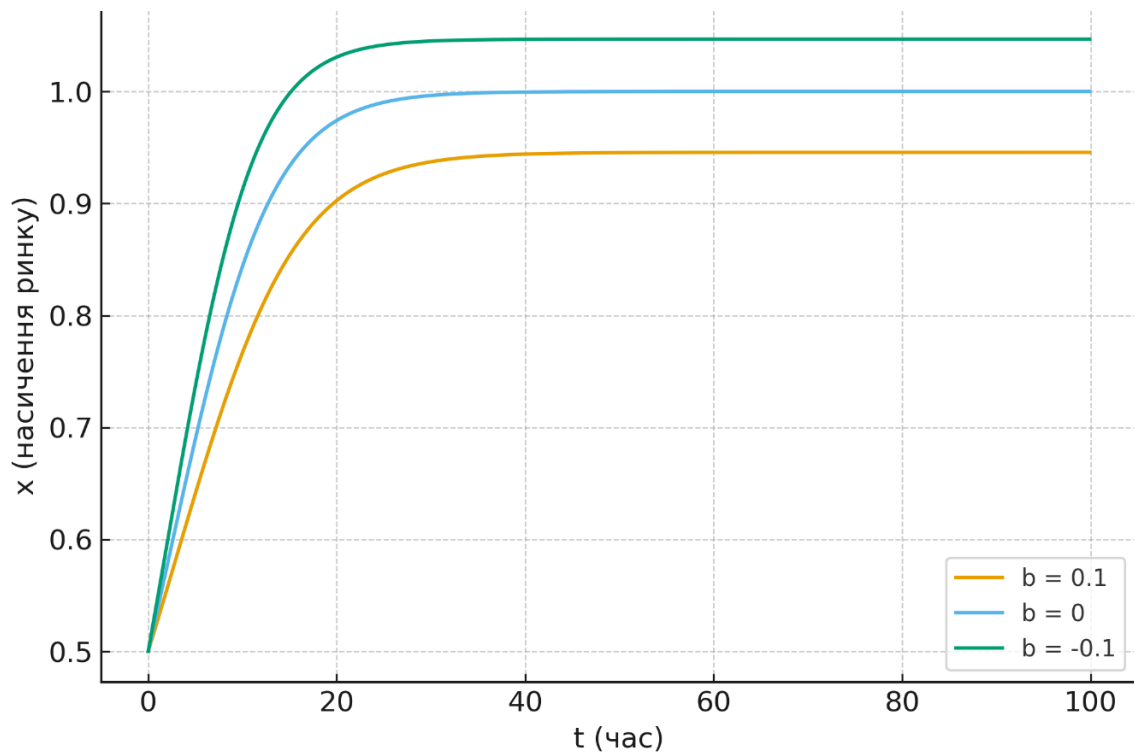
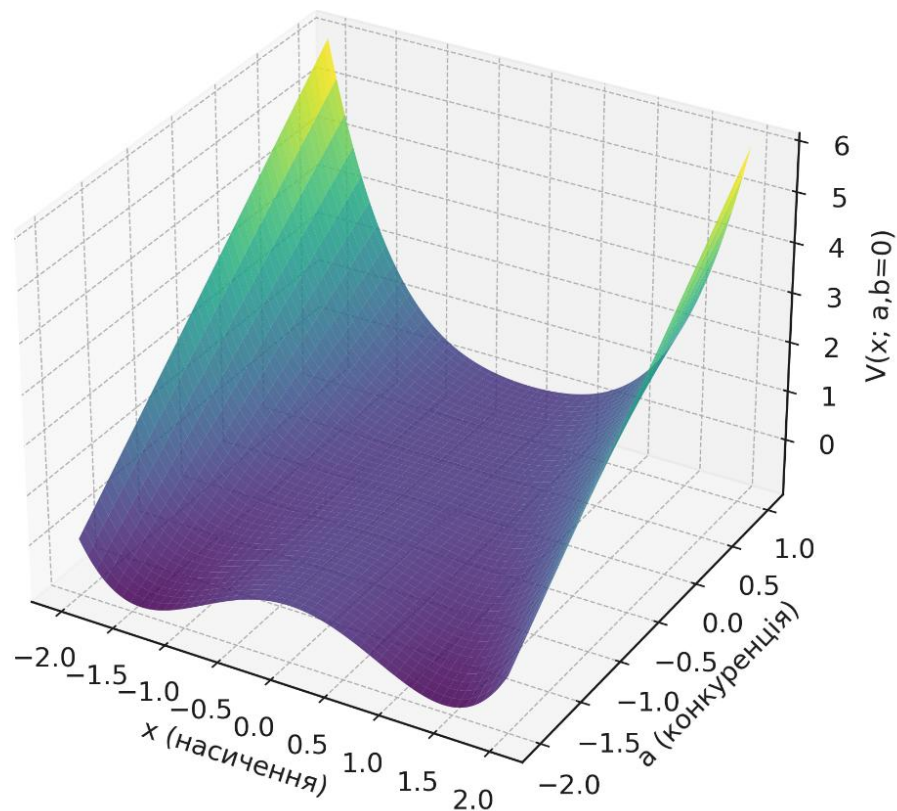
Для фіксованого $a = -1$ форма потенціалу залежить від параметра b : при $b > 0$ – одна стійка фаза (росту), при $b = 0$ – два симетричні мінімуми (нестійкий баланс), при $b < 0$ – одна фаза насичення. Другу похідну $V''(x) = 3x^2 + a$ використовують для визначення стійкості: якщо $V''(x) > 0$ – стан стабільний (мінімум), якщо $V''(x) < 0$ – нестійкий (максимум). Таким чином, два зовнішні стани є стійкими, а центральний – нестійкий. Висновок тут полягає в тому, що потенціальна функція не лише візуалізує енергетичний ландшафт ринку, але й дозволяє кількісно оцінити ризики: при негативному b (коли задоволеність перевищує попит) система тяжіє до насичення, де подальша конкуренція може призвести до колапсу.

Динамічна еволюція системи. Еволюційне рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma(x^3 + ax + b), \quad (4)$$

описує рух системи до стану мінімуму потенціалу. Для різних b отримуємо різні сценарії – стабілізацію, критичну рівновагу або стрибок (рис. 3). У ненасиченому режимі ($b > 0$) система швидко стабілізується на низькому рівні насичення, що відповідає фазі масового виробництва. У критичному стані ($b = 0$) еволюція уповільнюється, але шум або дифузія характеристик змушує систему обрати одну зі стійких фаз. У насиченому режимі ($b < 0$) відбувається швидкий перехід до високого рівня насичення, де ринок фокусується на диференціації через інформацію та довіру. Висновок: динамічне рівняння підкреслює роль часу в ринкових процесах – перехідні фази не є статичними, а залежать від швидкості релаксації (γ) та зовнішніх збурень, що узгоджується з ідеєю дифузії характеристик як каталізатора змін.

Геометрична інтерпретація. У просторі (x, a, V) поверхня потенціалу має форму подвійної складки, що показано на рис. 4: для $a < 0$ – дві долини (стійкі стани), при збільшенні a одна долина зникає – система «переходить» у нову фазу. Ця геометрія ілюструє гістерезис: ринок може «застрягти» в одній фазі, навіть якщо параметри змінилися, доки не досягне критичної точки. Висновок: геометрична інтерпретація робить модель інтуїтивною для аналізу – поверхня потенціалу візуалізує, як конкуренція (a) «роздвоює» ринкові стани, а попит (b) визначає асиметрію, що пояснює стійкість фаз зростання та ризики насичення в гіпотезі.

Рис. 3. Еволюція стану $x(t)$ при $a = -1$, $\gamma = 0.1$ Рис. 4. 3D-поверхня потенціалу $V(x; a, b=0)$

Для ілюстрації практичного застосування моделі cusp catastrophe розглянемо емпіричний аналіз ринку смартфонів. Використовуючи дані про продажі та характеристики пристроїв з 2007 по 2025 рік, можна параметризувати модель (з певними допущеннями):

- x - як частку ринку, зайняту стандартизованими пристроями;

- а - як рівень конкуренції між брендами (наприклад, Apple, Samsung, Huawei);
- б - як різницю між попитом на інновації та поточним задоволенням (засновану на опитуваннях споживачів).

Симуляції показують, що в 2007-2010 рр. (фаза зростання) $b > 0$, з низьким а, що забезпечує стабільний мінімум на низькому х. З 2015 р. дифузія характеристик (екрани OLED, AI-камери) збільшує а, переводячи систему до біфуркаційного стану ($\Delta \approx 0$), де в 2020-2023 рр. відбувається стрибок до насичення ($x \rightarrow 1$), з падінням прибутковості. Це узгоджується з реальними даними про стагнацію ринку в 2024-2025 рр., де конкуренція змушує фокус на диференціації (екрани, що складаються, вбудовані ШІ агенти, екологічність). Таким чином, модель дає можливість прогнозування, дозволяючи бізнесу ідентифікувати критичні точки для впливу на ситуацію.

Висновки та перспективи

Модель cusp catastrophe кількісно відображає фазову динаміку ринку, описуючи раптові переходи між фазами росту й насичення. Дифузія характеристик є внутрішнім механізмом, який зменшує різницю між попитом і задоволенням та посилює конкуренцію, переводячи систему до біфуркаційного стану. Рівноважні стани ринку відповідають мінімумам потенціалу, а їхня стійкість визначається знаком другої похідної. Отримана модель може бути використана для прогнозування ринкової стабільності, аналізу критичних точок і стратегічного планування у виробничо-економічних системах.

Список літератури

1. Ansoff H. Igor. *Strategic Management*. London: Macmillan Press, 1979. 248 p.
2. Barunik J., Vosvrda M. Can a stochastic cusp catastrophe model explain stock market crashes? *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2009. Vol. 33, No. 10. P. 1824–1836. DOI: 10.1016/j.jedc.2009.03.015.
3. Dou W., Ghose S. A dynamic nonlinear model of online retail competition using Cusp Catastrophe Theory. *Journal of Business Research*. 2006. Vol. 59, No. 7. P. 838–848. DOI: 10.1016/j.jbusres.2006.07.013.
4. Rosser J. B. The rise and fall of catastrophe theory applications in economics. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2007. Vol. 31, No. 10. P. 3255–3280. DOI: 10.1016/j.jedc.2007.01.007.
5. Thom R. *Structural Stability and Morphogenesis*. New York: W. A. Benjamin, 1975. (Digital edition: Routledge, 2018). 348 p. DOI: 10.1201/9780429493027.
6. Varian H. R. Economic applications and statistical analysis of the cusp catastrophe model. *Mathematical Social Sciences*. 1991. Vol. 22, No. 3. P. 227–254. DOI: 10.1016/0165-4896(91)90023-V.
7. Zeeman E. C. *Catastrophe Theory: Selected Papers 1972–1977*. London: Addison-Wesley, 1977. 675 p.
8. Гесць В. М. Модернізація економіки України: стратегія розвитку. Київ: Національна академія наук України, Інститут економіки та прогнозування, 2011. 360 с. URL: <https://ief.org.ua/docs/mg/11.pdf>
9. Гесць В. М. Стійкість розвитку економічних систем у контексті нелінійної динаміки. *Економіка України*. 2015. № 3. С. 4–17.
10. Портер М. Конкурентна перевага країн / пер. з англ. Київ: Наш Формат, 2020. 896 с. ISBN 978-617-7682-93-2.

S. Solomakha, O. Yasinetskyi

NONLINEAR DYNAMICS OF MARKET SEGMENT EVOLUTION: MATHEMATICAL MODELING BASED ON THE CUSP CATASTROPHE CONCEPT

A mathematical model describing the nonlinear evolution of market segments is developed based on the cusp catastrophe (catastrophe of the “cusp” type) from René Thom’s catastrophe theory. The proposed framework conceptualizes market development not as a smooth, continuous trajectory but

as a sequence of stable phases separated by abrupt transitions. These transitions emerge from the interaction of three core factors: unsatisfied demand, consumer satisfaction, and the intensity of competition. Their dynamic interplay shapes the structure of the potential function whose minima correspond to stable market states.

The model introduces the canonical potential function of the cusp catastrophe along with its equilibrium condition, discriminant, and bifurcation manifold, which together determine the number and stability of possible market equilibria. It is shown that under specific parameter configurations, the system exhibits bistability, where two stable phases (growth and saturation) coexist alongside an unstable transitional state. This structure explains the possibility of sudden market shifts driven by small variations in external parameters—analogous to market saturation events, competitive shocks, or abrupt changes in consumer behavior.

In addition, the model highlights the role of characteristic diffusion—when key product attributes spread among competitors—in reducing differentiation and increasing competitive pressure. This mechanism gradually pushes the system toward the bifurcation region, where phase transitions become unavoidable. Illustrative examples from the smartphone industry and historical production cycles demonstrate how these nonlinear dynamics manifest in real markets.

The results support the applicability of catastrophe theory as a tool for analyzing market instability and structural transformations. The model offers a compact yet powerful mathematical instrument for identifying critical points, forecasting nonlinear responses, and enhancing strategic decision-making in competitive economic environments.

Keywords: cusp catastrophe; nonlinear dynamics; potential function; market segment; phase transitions; catastrophe theory; diffusion of characteristics.
