

УДК 004.942:621.396.67

DOI: 10.31673/2412-9070.2026.017402

О. С. БИЧКОВ, д-р техн. наук, професор;

ORCID: 0000-0002-9378-9535

А. В. ШАТИРКО, д-р фіз.-мат. наук, професор;

ORCID: 0000-0002-5648-2999

А. Ю. ІВАНЕНКО, аспірант,

ORCID: 0009-0002-0141-0848

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ КЛАСИЧНИХ МЕТОДІВ ПЕЛЕНГАЦІЇ DOA

У цій роботі представлено огляд класичних методів оцінювання напрямку приходу сигналу (DOA). Розглянуто шість ключових підходів, які можна класифікувати за чотирма основними групами: енергетичні методи - метод затримки та сумування (Delay-and-Sum, DAS), який часто називають методом Бартлетта, метод узагальненої взаємної кореляції з фазовим перетворенням (GCC-PHAT), метод керованої потужності відгуку з фазовим перетворенням (SRP-PHAT); адаптивні методи, такі як метод мінімальної дисперсії (MVDR), також відомий як метод Кейпона; підпросторові методи, зокрема метод класифікації множинних сигналів (MUSIC) та метод оцінювання параметрів сигналу через обертальну інваріантність (ESPRIT), а також оптимізаційні підходи, наприклад, через оператор найменшого абсолютного стиснення та вибору (LASSO). Для кожної методики проведено аналіз з точки зору обчислювальної складності, роздільної здатності (здатності розрізняти просторово близькі джерела) та стійкості до шуму (ефективності в умовах низького відношення сигнал/шум). Експериментальні результати, візуалізовані у вигляді полярних графіків спрямованості, які демонструють ключові переваги та обмеження кожного підходу у сценаріях з різним відношенням сигнал/шум та наявністю просторово близьких джерел. Також наведено відповідні модифікації для кожного методу, які представлені у науковій літературі. Особливістю цієї статті є приділення уваги до детального виведення абстрактних математичних формулювань класичних методів DOA, з метою забезпечення кращого розуміння їх принципів роботи на математичному та інтуїтивному рівні. Дана робота надає загальний огляд методів DOA для подальшого їх вивчення, застосування та покращення.

Ключові слова: напрям приходу сигналу; звук; енергетичні, адаптивні, підпросторові методи; критерії порівняння; сценарії застосування.

Вступ

Постановка проблеми. Пеленгація - це важливе завдання в обробці сигналів, яке використовується у радіолокації, гідроакустиці, бездротових комунікаціях і навігації. Його важливість зросла з поширенням безпілотних літальних апаратів (БПЛА), що стали масовим інструментом для моніторингу, розвідки та безпекових операцій у цивільній і військовій сферах. Водночас зростання їх доступності відкриває нові ризики - від шпигунства до порушення повітряного простору. Це робить задачу надійної локалізації джерел сигналів БПЛА критично важливою. Одним з методів її досягнення є оцінювання напрямку приходу сигналу (DOA). DOA не лише може визначити напрям, а й дає можливість підсилити сигнал з певного напрямку, що може бути корисним, наприклад, для супутникової навігації [1], мобільних мереж [2], а також боротьби з перешкодами з різних напрямків [3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Класичні алгоритми DOA, такі як методи Бартлетта (DAS) й GCC-PHAT/SRP-PHAT, адаптивний MVDR, підпросторові MUSIC та ESPRIT, а також оптимізаційні методи на базі LASSO, були розроблені декілька десятиліть тому.

Проте, вони продовжують активно розвиватися завдяки появі нових методів і модифікацій. Наприклад, у [4] запропонований підхід, що підвищує здатність виявляти слабкі джерела.

У [5] запропоновано широкосмуговий фреймворк, який дозволяє застосовувати підпросторові методи безпосередньо до широкосмугових даних, зменшуючи обчислювальну складність та зберігаючи високу точність.

Мета цієї статті полягає в описі, аналізі та порівнянні роботи класичних методів DOA, поданні їх детального математичного виведення та аналізу ключових характеристик, а також у наданні пропозицій напрямів їх вдосконалення для практичного застосування.

Науковий внесок роботи полягає у:

- систематизації класичних методів DOA за єдиною методологічною основою з детальним математичним виведенням формул, що забезпечує відтворюваність результатів;
- формалізації критеріїв порівняння методів з урахуванням практичних вимог систем виявлення та локалізації;
- формулюванні рекомендацій щодо вибору методу залежно від характеристик задачі, що має безпосереднє практичне значення для розробників систем пеленгації;
- аналізі сучасних модифікацій кожного методу, що дозволяє визначити напрямки подальшого вдосконалення алгоритмів DOA.

Основна частина

Принцип роботи масиву антен та дослідження основних методів пеленгації

DOA [6] у сфері цифрової обробки сигналів - це задача, яка полягає у визначенні напрямку надходження одного або декількох сигналів. Зазвичай для вирішення цієї задачі в якості обладнання використовують масив антен [7], мікрофонів, сонарів. Це дозволяє системі розрізняти просторові характеристики сигналів.

Наприклад, на рис. 1 представлено лінійну решітку з 3 мікрофонів, розташованих на однаковій відстані d один від одного. Показано, як плоска хвиля сигналу надходить до решітки під кутом θ відносно нормалі до решітки. Цей кут є параметром, який системи DOA намагаються знайти. Різниця в часі і фазі приходу сигналу на різні елементи решітки використовується для обчислення цього кута.

Припустимо, на перший мікрофон сигнал надходить як $x(t)$. Тоді, сигнал, що прийшов на другий мікрофон,

буде затриманий на деякий час Δt і може бути виражений як: $x(t - \Delta t)$. Ця затримка Δt безпосередньо залежить від відстані між мікрофонами та кута приходу звукової хвилі. Якщо відстань між сусідніми мікрофонами становить d , а кут приходу звуку відносно нормалі до решітки становить θ , то затримку можна розрахувати наступним чином:

$$\Delta t = \frac{d \sin(\theta)}{v}, \quad (1)$$

де v - швидкість поширення сигналу в середовищі (в повітрі це приблизно 343 м/с за стандартних умов), а $d \sin(\theta)$ представлений пунктирною стрілкою на рис. 1.

Підставивши в (1) значення швидкості звуку в повітрі, отримаємо значення затримки для акустичних сигналів:

$$\Delta t = \frac{d \sin(\theta)}{343}.$$

У системах DOA для вузькосмугових сигналів часова затримка Δt сигналу, що надходить на різні елементи решітки, перетворюється на фазовий зсув. Це дозволяє безпосередньо працювати з фазовими відмінностями, для визначення напрямку приходу сигналу.

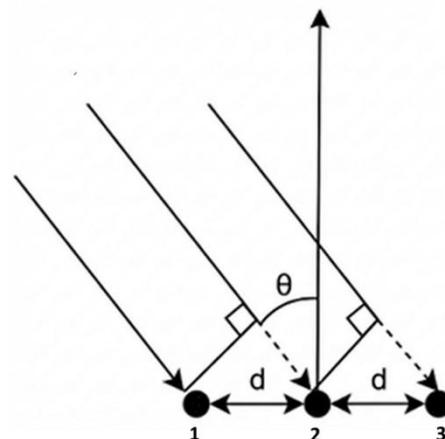


Рис. 1. Схема лінійної мікрофонної решітки

Вузькосмуговий сигнал часто моделюється як комплексний синусоїд s , який на реальних даних може бути визначений за допомогою швидкого перетворення Фур'є [8]. Нехай сигнал на першому мікрофоні (або базовому елементі решітки) буде представлений як:

$$s(t) = \rho e^{j\omega t}, \quad (2)$$

де ρ - комплексна амплітуда (амплітуда та початкова фаза); j - уявна одиниця; ω - кутова частота сигналу ($\omega = 2\pi f$, де f - частота в Герцах), t - час.

Якщо той самий сигнал приходить на інший мікрофон із часовою затримкою Δt , то він матиме вигляд $s(t - \Delta t)$. Підставивши $(t - \Delta t)$ у вираз (2), отримуємо:

$$s(t - \Delta t) = \rho e^{j\omega(t - \Delta t)} \quad \text{або} \quad s(t - \Delta t) = \rho e^{j\omega t} e^{-j\omega \Delta t}.$$

Звернувши увагу на те, що $\rho e^{j\omega t}$ - це початковий сигнал $s(t)$, отримуємо ключове співвідношення:

$$s(t - \Delta t) = s(t) \cdot e^{-j\omega \Delta t},$$

тут $e^{-j\omega \Delta t}$ представляє собою комплексну експоненту фазового зсуву. Це дозволяє нам розглядати вплив затримки не як зміщення сигналу в часі, а як зміну фази.

Метод Барлетта

Енергетичний метод який є одним з найпростіших методів формування променя та пеленгації джерела звуку. Його основна ідея полягає в тому, щоб компенсувати часові затримки, а потім підсумувати сигнали з усіх мікрофонів решітки. Коли сигнали правильно вирівняні, вони когерентно додаються, утворюючи пік у певному напрямку, що відповідає напрямку джерела звуку.

Припустимо, у нас є лінійна мікрофонна решітка з M елементів, розташованих уздовж осі x , і відстань між сусідніми мікрофонами становить d . Якщо плоска звукова хвиля надходить до решітки під кутом θ відносно нормалі до решітки, то шлях, який долає сигнал до m -го мікрофону, буде відрізнятися від шляху до першого мікрофону.

Геометрично, різниця у відстані ΔL_m між m -тим мікрофоном та першим мікрофоном для сигналу, що надходить під кутом θ , може бути виражена як:

$$\Delta L_m = (m - 1) d \sin \theta.$$

Ця формула враховує, що сигнал, який досягає m -го мікрофону, проходить додаткову відстань $(m - 1) d \sin(\theta)$ порівняно з першим мікрофоном, у випадку $\theta > 0$.

Відповідна часова затримка $\tau_m(\theta)$ приходу сигналу для m -го мікрофону відносно першого мікрофону буде мати вигляд:

$$\tau_m(\theta) = \frac{\Delta L_m}{v} = \frac{(m - 1) d \sin(\theta)}{v}.$$

Тоді "сформований промінь" для заданого напрямку θ обчислюється як сума затриманих сигналів й буде представлено таким виразом:

$$y(\theta, t) = \sum_{m=1}^M X_m(t - \tau_m(\theta)).$$

Сигнал X з часової області можна перетворити на його представлення x у частотній області за допомогою перетворення Фур'є [8]:

$$Y(\theta, k) = \sum_{m=1}^M X_m(k) \cdot e^{j \frac{2\pi f_k}{c} d_m(\theta)}.$$

Потужність або енергія сформованого променя для кожного напрямку θ може бути розрахована за формулою:

$$P_{\text{avg}}(\theta) = \frac{1}{N_{\text{freq}}} \sum_k \left| \sum_{m=1}^M X_m(k) \cdot e^{j \frac{2\pi f_k}{c} d_m(\theta)} \right|^2,$$

де $P_{avg}(\theta)$ - усереднена потужність сформованого променя для напрямку θ ; \sum_k - сумування за всіма частотами, які враховуються у розрахунку; N_{freq} - кількість частот, за якими відбувається усереднення.

Кут θ , для якого $P_{avg}(\theta)$ досягає максимального значення, вказує на ймовірний напрямок джерела звуку.

Ця реалізація дістала назву метод **Бартлетта** [9].

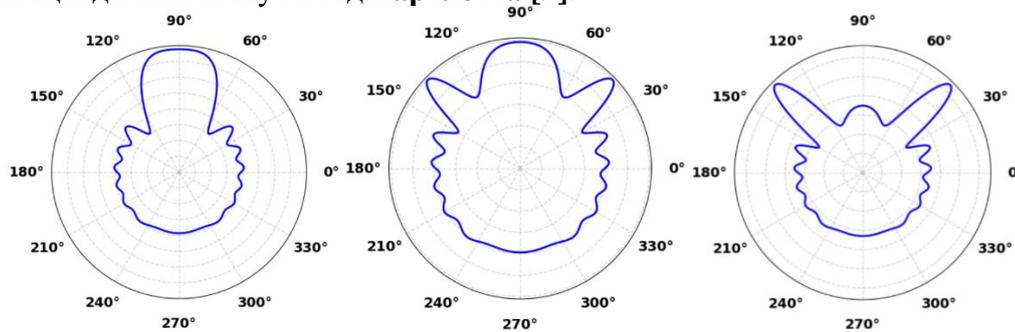


Рис. 2. Визначення напрямку приходу сигналу за методом DAS

На рис. 2 наведено 3 варіанти методу DAS, де осі представляють кут (напрямок) та оцінену потужність сформованого променя. Важливо, що експеримент проводиться за частотами, для яких половина довжини хвилі дорівнює відстані між приймачами решітки. Перший графік зліва - це графік з одним основним сигналом за напрямком 90^0 , у другому графіку додається сторонній сигнал за напрямком 45^0 , третій графік - це графік із стороннім сигналом, який вдвічі більший основного.

Модифікації та розширення:

- Зважений метод Бартлетта - покращення роздільної здатності та зменшення рівня бічних пелюсток [10, 11].
- Розширений метод Бартлетта для широкосмугових сигналів - обробка широкосмугових сигналів з розбиттям широкосмугового сигналу на вузькосмугові компоненти з наступним об'єднанням результатів [12].
- Метод Бартлетта з використанням розріджених масивів дозволяє значно збільшити кількість ступенів свободи та оцінювати більше джерел, ніж кількість фізичних датчиків [13].

Метод GCC-PHAT/ SRP-PHAT

Першим кроком цього методу є обчислення взаємної кореляції між двома сигналами. Взаємна кореляція вимірює схожість двох сигналів як функцію часового зсуву одного сигналу відносно іншого. Тобто, вона показує, наскільки потрібно зсунути один сигнал у часі, щоб він максимально збігся з іншим. Математично взаємна кореляція $R_{x_1x_2}(\tau)$ між сигналами $x_1(t)$ і $x_2(t)$ визначається як:

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(t)X_2(t-\tau)dt ,$$

де τ - це часова затримка, на яку зміщується сигнал $x_1(t)$ відносно $x_2(t)$. Пік цієї функції вказує на часову затримку, за якої два сигнали найбільш подібні. Для цього методу також застосовуємо перетворення Фур'є [8] та отримуємо:

$$x_1(\omega) = s(\omega) + n_1(\omega) , \quad x_2(\omega) = \alpha_0 s(\omega) \exp(-j\omega\tau_0) + n_2(\omega) ,$$

де n_1 і n_2 - некорельовані шуми; α_0 - ослаблення, або підсилення сигналу відносно першого мікрофону. У частотній області взаємна кореляція відповідає взаємному спектру потужності, який визначається як добуток перетворення Фур'є вектору першого сигналу на ермітово-спряжений вектор Фур'є другого сигналу:

$$G_{x_1x_2}(\omega) = x_1(\omega)x_2^H(\omega).$$

Підставляючи вирази для $x_1(\omega)$ та $x_2^*(\omega)$, і припускаючи, що некорельовані шуми зникають, отримаємо наступне рівняння:

$$G_{x_1x_2}(\omega) \approx \alpha_0 |s(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau_0).$$

Тоді функція ГСС-РНАТ у часовій області буде представлена формулою:

$$R_{x_1x_2}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{G_{x_1x_2}(\omega)}{|G_{x_1x_2}(\omega)|} \right) e^{j\omega l} d\omega.$$

Дане рівняння можемо спростити наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{G_{x_1x_2}(\omega)}{|G_{x_1x_2}(\omega)|} &= \frac{\alpha_0 |s(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau_0)}{|\alpha_0 |s(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau_0)|}, \\ |\alpha_0 |s(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau_0)| &= |\alpha_0|^2 |s(\omega)|^2 |\exp(j\omega\tau_0)| = |\alpha_0|^2 |s(\omega)|^2 \cdot 1, \\ \frac{\alpha_0 |s(\omega)|^2 \exp(j\omega\tau_0)}{|\alpha_0 |s(\omega)|^2} &= \text{sign}(\alpha_0) \exp(j\omega\tau_0). \end{aligned}$$

Так як коефіцієнт α_0 завжди додатній, то можемо ним знехтувати:

$$R_{x_1x_2}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau_0} e^{j\omega l} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(l-\tau_0)} d\omega.$$

Остаточно матимемо:

$$R_{x_1x_2}(1) = \delta(l - \tau_0). \quad (3)$$

Тобто функція (3) набуває свого значення 1 щойно зсув співпадає з часом затримки.

З вищенаведеного випливає, що множення взаємного спектру на $e^{-j\omega\tau(\theta)}$ дозволяє компенсувати різницю ходу хвиль для заданого напрямку θ . Величину $\tau(\theta)$ тут визначено як гіпотетичну часову затримку між парою мікрофонів. Це корисно у випадках, коли є багато мікрофонів. Даний метод отримав назву SRP-РНАТ [14]:

$$R_{x_1x_2}(1, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{G_{x_1x_2}(\omega)}{|G_{x_1x_2}(\omega)|} e^{-j\omega\tau(\theta)} e^{j\omega l} d\omega.$$

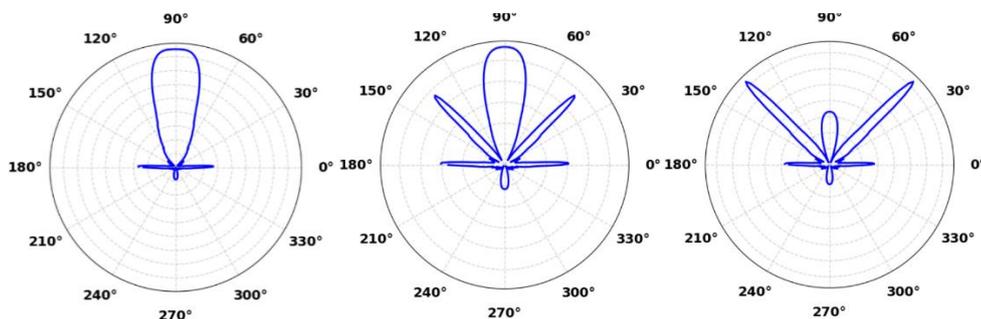


Рис. 3. Визначення напрямку приходу сигналу за методом SRP-РНАТ

Як видно з рис.3, розроблений метод ефективно показує більш гострі напрямки в області фактичного приходу звуків. Однак, крім головного, добре сфокусованого напрямку, спостерігається також зростання "неправильних" максимумів у сторони 0° (або 360°) та 180° і вони зростають більш швидко, коли кут θ також збільшується.

Модифікації та розширення:

- SRP-РНАТ з адаптивними вагами, що значно покращує продуктивність у зашумлених умовах [15, 16].

- SRP-PHAT з використанням нейронних мереж, що дозволяє краще узгоджувати метод з конкретними акустичними умовами [17, 18].
- Метод сингулярного розкладу з фазовим перетворенням (SVD-PHAT) для покращення роздільної здатності та стійкості до шуму [19].

Метод Кейпона

Адаптивний метод формування променю Кейпона, також відомий як формувач променю - MVDR [20]. Він оптимізує ваги антенної решітки, щоб мінімізувати вихідну потужність, одночасно підтримуючи незмінну реакцію у бажаному напрямку. Виведення формули для визначення ваг MVDR променю ґрунтується на двох ключових умовах.

Перша умова - скалярний добуток вектору ваг мікрофонної решітки w та вектору приходу сигналу $a(\theta)$, який відповідає бажаному напрямку θ , дорівнює 1:

$$w^H a(\theta) = 1. \quad (4)$$

Друга умова спрямована на мінімізацію загальної вихідної потужності променю. Мінімізація вихідної потужності при дотриманні умови неспотвореної відповіді для бажаного сигналу призводить до придушення різних сигналів та шумів, що надходять з інших напрямків. Вихідна потужність променю визначається:

$$P_{\text{out}} = E[|y(t)|^2] = E[|w^H x(t)|^2] = w^H E[x(t)x^H(t)] w = w^H R_x w,$$

де $y(t)$ - вихідний сигнал променю; $x(t)$ - вхідний вектор сигналів на елементах решітки; $R_x = E[x(t)x^H(t)]$ - коваріаційна матриця вхідних сигналів.

Для вирішення цієї задачі оптимізації з обмеженнями використовується метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа $L(w, \lambda)$ визначається як:

$$L(w, \lambda) = w^H R_x w + \lambda (1 - w^H a(\theta)) + \lambda^* (1 - a^H(\theta) w).$$

Для знаходження мінімуму функції Лагранжа, у випадку комплексних змінних, частинна похідна береться за w^H :

$$\frac{\partial L}{\partial w^H} = R_x w + \lambda a(\theta) = 0.$$

З останнього виразу маємо:

$$w = -\lambda R_x^{-1} a(\theta). \quad (5)$$

Щоб знайти значення λ , підставляємо отриманий вираз (5) назад в умову обмеження (4):

$$(-\lambda R_x^{-1} a(\theta))^H a(\theta) = 1 = (R_x^{-1} a(\theta))^H (-\lambda)^* a = a^H(\theta) (R_x^{-1})^H (-\lambda^*) a(\theta).$$

Оскільки коваріаційна матриця R_x є ермітовою ($R_x = R_x^H$), то її обернена також ермітова, тоді:

$$a^H(\theta) R_x^{-1} (-\lambda^*) a(\theta) = 1 = (-\lambda^*) a^H(\theta) R_x^{-1} a(\theta).$$

Отже:

$$(-\lambda^*) = \frac{1}{a^H(\theta) R_x^{-1} a(\theta)}. \quad (6)$$

Для подальших розрахунків потрібно довести що $\lambda^* = \lambda$. Для цього доведемо, що:

$$(a^H(\theta) R_x^{-1} a(\theta))^H = a^H(\theta) R_x^{-1} a(\theta), \quad (7)$$

$$\left(a^H(\theta)R_x^{-1}a(\theta)\right)^H = a^H(\theta)\left(a^H(\theta)R_x^{-1}\right)^H = a^H(\theta)\left(R_x^{-1}\right)^H\left(a^H(\theta)\right)^H = a^H(\theta)\left(R_x^{-1}\right)^H\left(a^H(\theta)\right)^H = a^H(\theta)\left(R_x^{-1}\right)^H a(\theta) = a^H(\theta)R_x^{-1}a(\theta)$$

Останнє перетворення є вірним бо R_x - ермітова матриця. Знаменник у рівності (6) - дійсне число, бо тільки дійсне число має ермітове спряження, яке дорівнює самому собі (7). $(-\lambda^*)$ - дійсне число, тому що чисельник і знаменник у формулі (6) дійсні, а ділення двох дійсних чисел дає дійсне число. Отже $\lambda^* = \lambda$.

Підставимо значення (5) назад у вираз (4) і отримаємо:

$$w_{MVDR} = \frac{R_x^{-1}a(\theta)}{a^H(\theta)R_x^{-1}a(\theta)}$$

Обчислення вихідного сигналу $y(t)$ здійснюється шляхом скалярного добутку ермітово-спряженого вектору вагових коефіцієнтів w_{MVDR}^H на вектор вхідних сигналів $x(t)$:

$$y(t) = w_{MVDR}^H x(t)$$

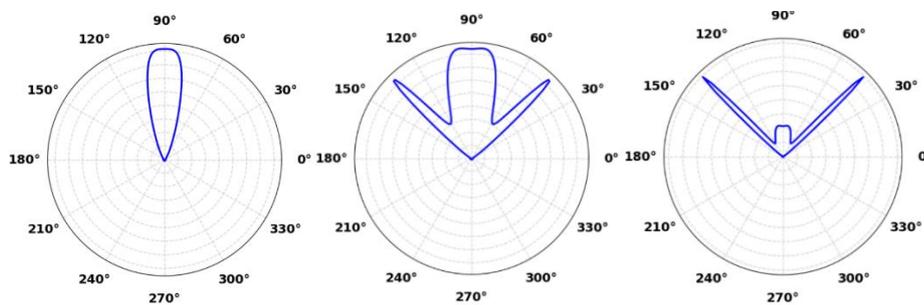


Рис. 4. Визначення напрямку приходу сигналу за методом MVDR

Як видно з рис. 4, метод MVDR продемонстрував високу ефективність, бо точно виявив джерела сигналу, що підтверджується чіткими піками у спектрі потужності. Водночас, у всіх інших напрямках енергія була майже нульова, що свідчить про успішно знайдені джерела сигналів.

Модифікації та розширення:

- Ширококутовий MVDR - обробка ширококутових сигналів для одночасного врахування всіх частотних компонент [21].
- MVDR з просторовим згладжуванням - обробка когерентних джерел, що дозволяє покращити оцінку DOA для корельованих джерел [22].
- MVDR з обмеженнями - включає додаткові обмеження на ваги променевого формувача для покращення робастності до помилок моделювання та калібрування [23].

Метод MUSIC

Основна ідея підпросторового методу MUSIC [24] полягає у розкладанні власного значення коваріаційної матриці прийнятих сигналів сенсорної решітки для розділення простору на два ортогональні підпростори - сигнальний підпростір та шумовий підпростір. Підхід базується на тому факті, що вектори керувань, які відповідають істинним кутам приходу сигналів, є ортогональними до шумового підпростору. Це означає, що скалярний добуток вектору керування для джерела сигналу з будь-яким вектором з шумового підпростору буде нульовим.

Обґрунтуємо формулу для MUSIC. У нас є модель прийому сигналів кожним мікрофоном:

$$x(t) = As(t) + n(t),$$

де $x(t)$ - це вектор прийнятих даних із сенсорів (мікрофонів); $s(t)$ - вектор чистих сигналів, A - матриця керування, що показує, яким чином кожен сигнал надходить до сенсорів; $n(t)$ - шуми.

Коваріаційна матриця прийнятого сигналу R_x має вигляд:

$$R_x = E[x(t)x^H(t)] = E[(As(t) + n(t))(As(t) + n(t))^H] = AR_sA_n^H + \sigma_n^2 I,$$

$$R_s = s(t)s^H(t).$$

При цьому припускається, що сигнали та шуми статистично некорельовані, а шум - білий і некорельований між сенсорами.

У випадку, коли кількість сенсорів N перевищує кількість некорельованих сигналів L матриця $AR_sA_n^H$ є сингулярною, тобто $\det[AR_sA_n^H] = \det[R_x - \sigma_n^2 I] = 0$. Це вказує на те, що дисперсія шуму σ_n^2 є власним значенням коваріаційної матриці R_x . Отже, можливо розкласти матрицю R_x наступним чином:

$$R_x = E_s \Lambda_s E_s^H + E_n \Lambda_n E_n^H,$$

де E_s - матриця, складена з власних векторів сигналу; E_n - матриця власних векторів шуму.

Так як вектор напрямку $a(\theta)$ належить сигнальному простору, то він ортогональний до шумового простору:

$$E_n^H a(\theta) = 0.$$

Тоді можливо знайти напрям сигналів наступним чином:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) E_n E_n^H a(\theta)}.$$

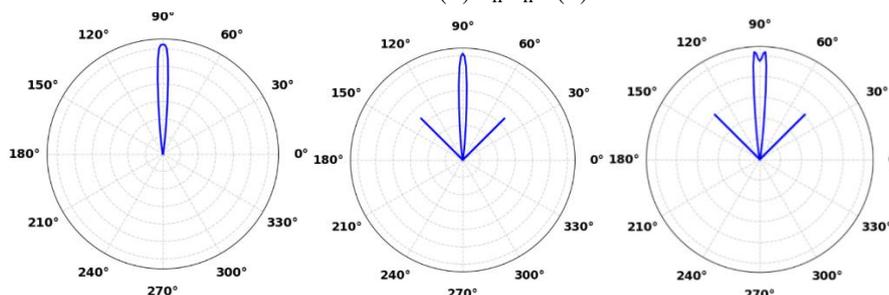


Рис. 5. Визначення напрямку приходу сигналу за методом MUSIC

Представлені полярні графіки на рис. 5 ілюструють застосування алгоритму MUSIC для оцінки DOA. В ідеальних умовах псевдоспектр MUSIC має демонструвати чіткі, гострі піки, що точно вказують на кути розташування джерел сигналу. Однак на цих візуалізаціях спостерігається незвичайна поведінка, а саме те, що верхній пік трохи змістився від кута 90° . Варто зазначити, що дана проблема у нашій симуляції спостерігається лише при великих кутах.

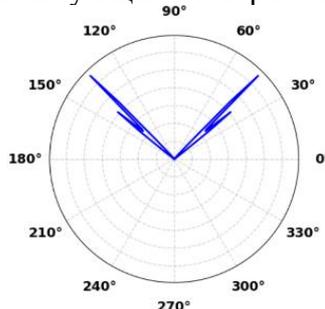


Рис. 6. Визначення DOA за методом MUSIC для джерел, розміщених під кутами 45° , 40°

Алгоритм MUSIC продемонстрував високу роздільну здатність у розрізненні близькорозташованих джерел сигналу, що є його ключовою перевагою у задачах DOA. На наданому полярному графіку (рис. 6) чітко видно здатність методу ідентифікувати два сигнали, розташовані під кутами 40° та 45° , виділяючи їх окремими, чітко розділеними піками у псевдоспектрі. Ця особливість робить MUSIC ефективним інструментом для сценаріїв, де

потрібне точне визначення напрямків приходу сигналів навіть при їхньому близькому розташуванні.

Модифікації та розширення:

- Кореневий MUSIC – метод, який перетворює проблему пошуку піків у проблему знаходження коренів поліному [25]. Цей підхід забезпечує вищу точність та меншу обчислювальну складність.

- Унітарний MUSIC - метод для зменшення обчислювальної складності та покращення продуктивності у сценаріях з низьким відношенням сигнал/шум [26].

- MUSIC когерентного підпростору сигналів - метод обробки когерентних джерел, який використовує просторове згладжування для відновлення рангу коваріаційної матриці [5].

Метод ESPRIT

Підпросторовий метод, що використовує властивість обертальної інваріантності між двома ідентичними підмасивами антен. На відміну від інших розглянутих методів, ESPRIT [27] не потребує пошуку за сіткою кутів, а визначає кути напряму приходу сигналів через розв'язання задачі знаходження власних значень.

Нехай у нас є два однакові підмасиви, що зсунуті один відносно іншого на відстань Δ . Сигнал, отриманий першим підмасивом:

$$x(t) = \sum_{i=1}^I a(\theta_i) s_i(t) + n_x(t) = As(t) + n_x(t).$$

Сигнал, отриманий другим підмасивом:

$$y(t) = \sum_{i=1}^I a(\theta_i) e^{j\gamma_i} s_i(t) + n_y(t) = A\Phi s(t) + n_y(t),$$

де $\gamma_i = \omega_0 \Delta \sin \theta_i / c$ - фазовий зсув; $\Phi = \text{diag}(e^{j\gamma_1}, e^{j\gamma_2}, \dots, e^{j\gamma_I})$ - діагональна матриця фазових зсувів;

$a(\theta)$ - вектор спрямованості антенного масиву.

Об'єднавши сигнали обох підмасивів, запишемо:

$$z(t) = (x(t), y(t)) = (A, A\Phi)s(t) + (n_x(t), n_y(t)) = \bar{A}s(t) + n_z(t).$$

Коваріаційна матриця прийнятого сигналу R_z матиме вигляд:

$$R_z = E[x(t)x^H(t)] = E[(As(t) + n(t))(As(t) + n(t))^H] = AR_s A^H + \sigma_n^{2I} \quad R_s = s(t)s^H(t),$$

або

$$R_z = (A_x A_y) R_s (A_x A_y)^H + \sigma_n^{2I}.$$

Після застосування сингулярного розкладу (SVD) матимемо:

$$U_z = [U_x U_y],$$

де U_x - верхні рядки матриці власних векторів (відповідають підрешітці x); U_y - нижні рядки (відповідають підрешітці y).

Оскільки підпростір сигналу породжується тими самими векторами направленості A_x і $A_y = A_x \Phi$, то можливо записати:

$$[U_x U_y] \approx [A_x A_x \Phi]^T$$

для деякої невідомої повнорозмірної матриці T . Крім того відомо, що $\text{rank}(U_{xy}) = I$, отже, розмірність ядра матриці U_z дорівнює $(2I - I) = I$. Це означає, що існує ненульова матриця F розмірності $2I \times I$, яка задовольняє умову:

$$U_z F = 0.$$

Якщо розписати останнє рівняння та здійснити заміну, то отримаємо наступне:

$$U_z F = [U_x U_y] [F_x F_y] = U_x F_x + U_y F_y = A_x T F_x + A_x \Phi T F_y = 0,$$

звідси можливо виразити Φ :

$$\Phi = T F_y F_x^{-1} T^{-1}.$$

Отримаємо власні числа λ_k матриці Φ :

$$\mu_k = \arg(\lambda_k)$$

та обраховуємо кути приходу сигналів:

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{\mu_k \lambda_{\text{wave}}}{2\pi d}\right),$$

де d - відстань між елементами підмасиву; λ_{wave} - довжина хвилі сигналу.

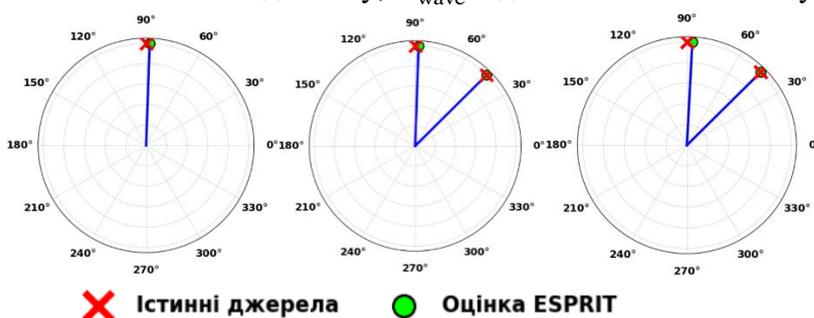


Рис. 7. Визначення напрямку приходу сигналу за методом ESPRIT

На полярних графіках (рис. 7) демонструється робота алгоритму ESPRIT за різних умов, ілюструючи як його потенціал, так і чутливість до параметрів вхідних даних. ESPRIT, на відміну від MUSIC, безпосередньо оцінює кути приходу, а не будує псевдоспектр. Ця властивість є досить зручною, адже суттєво зменшує необхідні обчислювальні ресурси.

Модифікації та розширення:

- Унітарний ESPRIT - метод для зменшення обчислювальної складності [28].
- ESPRIT на основі методу повних найменших квадратів (TLS-ESPRIT) - метод для покращення робастності до помилок у моделі та даних [29].
- 2D ESPRIT - метод для оцінювання двовимірних напрямків приходу (азимут та елевація), який використовує властивості зсувної інваріантності у двох вимірах [30].

Метод LASSO

Як вже зазначалося вище, для масиву мікрофонів приход сигналів моделюється наступним чином:

$$x(t) = A s(t) + n(t).$$

Традиційний оптимізаційний метод LASSO [31] мінімізує функцію втрат, що балансує між помилкою реконструкції та регуляризацією, яка використовується для зменшення кількості параметрів у нейронних мережах. Тим самим мінімізується кількість піків:

$$\min_s \frac{1}{2} \|y - A s\|^2 + \lambda \|s\|.$$

Використання стандартного методу LASSO часто призводить до хибних піків. Для вирішення цієї проблеми розроблено гібридний підхід, що інтегрує попередню інформацію про потенційні напрямки джерел у вигляді вагових коефіцієнтів w від іншої моделі, наприклад, використовуючи метод SRP-PHAT, який описано вище. З цих міркувань отримаємо наступну формулу:

$$\min_s \frac{1}{2} \|y - As\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^P w_i |s_i|.$$

Ваги w_i обернено пропорційні значенню спектру SRP-PHAT для кожного кута θ_i :

$$w_i = \frac{1}{R_{x_1 x_2}(1, \theta_i)}.$$

Для подальшого покращення розрідженості та стабілізації розв'язку до L_1 -регуляризації було вводиться додатковий штраф у вигляді квадратного кореня з абсолютного значення сигналів $s(t)$, з яких може бути складений вихідний сигнал $x(t)$, з метою ще більше стимулювати зменшення кількості передбачених напрямків приходу сигналу. Модифікована функція втрат набуває вигляду:

$$\min_s \frac{1}{2} \|y - As\|_F^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^P w_i \sqrt{|s_i|} + \sum_{i=1}^P w_i |s_i| \right).$$

Використання $\sqrt{|s_i|}$ в останній формулі робить штраф більш чутливим до комбінацій приходу сигналів, з яких може бути складений вихідний сигнал $x(t)$ на мікрофонах, ефективно зменшуючи їх варіативність. Це дозволяє краще відрізнити справжні джерела від фальшивих піків. Такий гібридний підхід використовує сильні сторони кожного методу: швидкість та точність методу LASSO, інтуїтивність методу SRP-PHAT для попереднього визначення напрямків та стабілізаційні властивості додаткового штрафу. Це забезпечує значне підвищення надійності та точності оцінки DOA.

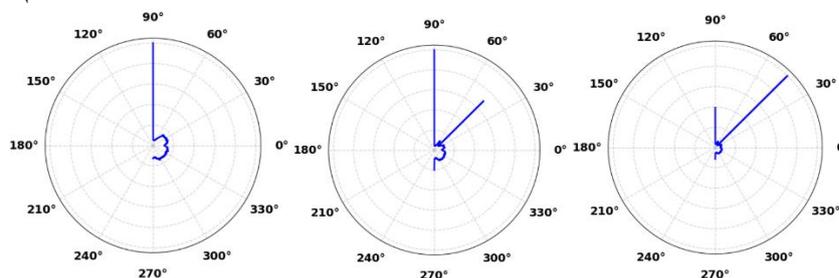


Рис. 8. Визначення напрямку приходу сигналу за методами LASSO та SRP-PHAT

Як видно з графіків (рис. 8), алгоритм дозволяє більш точно визначити напрямок прибуття сигналу порівняно з простим використанням лише SRP-PHAT для оцінки DOA. Але на жаль алгоритм схильний до хибних піків, якщо нормалізація налаштована некоректно. Гібридний підхід пом'якшує цей недолік, інтегруючи інформацію про потенційні джерела при правильно налаштованому механізмі регуляризації.

Модифікації та розширення:

- Адаптивний LASSO (A-LASSO) - метод для подолання зміщеності оцінок LASSO для великих коефіцієнтів [32]. Цей метод ітеративно покращує оцінку, зменшуючи зміщеність.
- LASSO з MVDR вагами – метод, який пропонує використовувати розв'язок MVDR методу як ваги для LASSO, що призводить до швидшої збіжності та точніших результатів [33].
- Ширококутовий LASSO - метод для обробки ширококутових сигналів [34].

Основний результат

Якщо підсумувати попередньо наведену інформацію, то можемо сказати, що кожен із методів визначення напрямку приходу сигналу, таких як метод Бартлетта, GCC-PHAT, MVDR, MUSIC, ESPRIT та LASSO має свої переваги і недоліки (таблиця).

Підсумкова таблиця порівняння характеристик методів DOA

Метод	Роздільна здатність	Чи працює з когерентними джерелами	Стійкість до шуму	Обчислювальна складність
Бартлетта	Низька	Так	Низька	Низька (одновимірний пошук)
GCC-PHAT	Середня	Так	Висока	Низька (одновимірний пошук)
MVDR	Висока	Ні	Висока	Низька (одновимірний пошук)
MUSIC	Дуже висока	Ні	Висока	Висока (розклад за власними числами + одновимірний пошук)
ESPRIT	Висока	Ні	Середня	Середня (розклад за власними числами)
LASSO	Висока	Так	Середня	Дуже висока (Ітеративний метод)

Вибір методу залежить від конкретних умов: середовища, наявності когерентних джерел, вимог до точності та доступних обчислювальних ресурсів.

На відміну від існуючих оглядових робіт, у даному дослідженні запропоновано комплексний підхід до оцінювання методів DOA, що враховує взаємозв'язок між теоретичними характеристиками алгоритмів та практичними вимогами систем локалізації.

Виділено такі формалізовані критерії:

Роздільна здатність - мінімальний кутовий інтервал $\Delta\theta_{\min}$ між двома джерелами, при якому алгоритм здатний їх розділити. Експериментально підтверджено (рис. 6), що підпросторові методи (MUSIC, ESPRIT) забезпечують $\Delta\theta_{\min} \approx 5^\circ$, тоді як енергетичні методи (Bartlett) мають $\Delta\theta_{\min} > 15^\circ$ за умов відношення сигнал/шум (SNR) на рівні 10 дБ.

Обчислювальна складність визначається домінуючою операцією алгоритму. Для підпросторових методів - це розклад за власними значеннями (EVD) з асимптотичною складністю $O(M^3)$, де M - кількість елементів решітки. Для енергетичних методів складність визначається пошуком за сіткою кутів $O(N_\theta \cdot M)$, де N_θ - кількість точок дискретизації кутового простору.

Робастність до когерентних джерел - критична характеристика для реальних сценаріїв з багатопробним поширенням сигналу. Встановлено, що методи GCC-PHAT та Bartlett зберігають працездатність при наявності когерентних джерел, тоді як MUSIC та ESPRIT потребують додаткового просторового згладжування.

На основі проведеного аналізу сформульовано практичні рекомендації для типових сценаріїв застосування:

Сценарій 1: Виявлення БПЛА у реальному часі. Рекомендовано використання GCC-PHAT/SRP-PHAT як базового методу з низькою обчислювальною складністю та високою стійкістю до реверберації. За необхідності підвищення роздільної здатності доцільно застосувати гібридний підхід LASSO з вагами від SRP-PHAT.

Сценарій 2: Точна локалізація стаціонарних джерел. За умов достатніх обчислювальних ресурсів та відсутності когерентних джерел оптимальним є метод MUSIC, що забезпечує найвищу роздільну здатність. Для зниження обчислювальних витрат рекомендовано модифікацію Root-MUSIC.

Сценарій 3: Обмежені обчислювальні ресурси. Метод Bartlett є оптимальним для вбудованих систем з обмеженою обчислювальною потужністю, де припустима нижча роздільна здатність.

Сценарій 4: Системи з вимогами до оцінювання у двовимірному просторі. Метод ESPRIT з модифікацією 2D-ESPRIT дозволяє одночасно оцінювати азимут та елевацію без значного збільшення обчислювальної складності.

Аналіз виявив системні обмеження, які необхідно враховувати при проєктуванні систем DOA:

1. Підпросторові методи (MUSIC, ESPRIT) потребують апіорного знання кількості джерел сигналу. Помилка у визначенні цього параметру призводить до суттєвої деградації точності оцінки.

2. Усі розглянуті методи базуються на припущенні про плоский хвильовий фронт, що обмежує їх застосування для ближньої зони (відстань до джерела менша за $2D^2/\lambda$, де D – апертура решітки).

3. Енергетичні методи мають принципове обмеження роздільної здатності, що визначається шириною головної пелюстки діаграми спрямованості решітки: $\Delta\theta \approx \lambda/(M \cdot d)$.

4. Метод LASSO, незважаючи на здатність працювати з когерентними джерелами, є чутливим до вибору параметру регуляризації λ , що потребує попереднього налаштування для конкретних умов застосування.

Висновки

Проведений порівняльний аналіз класичних методів DOA дозволив систематизувати підходи до оцінювання напрямку приходу сигналу за трьома ключовими критеріями: роздільна здатність, обчислювальна складність та робастність до умов середовища. На основі аналітичного дослідження та експериментальної верифікації встановлено закономірності, що визначають оптимальний вибір методу залежно від характеристик задачі. Експериментальні результати, що візуалізовані на полярних графіках, демонструють переваги та обмеження кожного підходу.

Перспективним напрямком подальших досліджень є інтеграція методів глибокого навчання з традиційними підходами до оцінювання DOA. Однак, слід зазначити, що такі підходи потребують великих наборів розмічених даних для навчання. Ще однією перспективною областю є поєднання сигнальних методів пеленгації з оптичними системами, що дозволить створити гібридні системи, здатні використовувати переваги обох підходів для досягнення високої точності пеленгації. Окремо варто відзначити перспективність використання декількох мікрофонних решіток для триангуляції об'єкта, що дозволяє не тільки визначати напрямок приходу, але й точно локалізувати джерело у тривимірному просторі. Цей підхід особливо ефективний для застосувань, де потрібна не лише кутова, але й просторова локалізація джерела, наприклад, системи «розумного будинку», автономні роботи та безпілотні літальні апарати.

Список літератури

1. Яковець В.П., Макаренко А.О., Руденко Н.В., Скрипнік В.В. Застосування машинного навчання під час інтеграції супутникового та зв'язку БПЛА // Зв'язок. – 2023. – № 1. – С. 3–9
2. Дмитрієв В.Є., Захаржевський А.Г., Чумак Н.С. Інваріантні системи керування в сучасній техніці зв'язку // Зв'язок. – 2022. – № 6. – С. 3–8.
3. Berkman L.N. Universal Method of Multidimensional Signal Formation for Any Multiplicity of Modulation in 5G Mobile Network // *Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering* / ed. M. Klymash, M. Beshley, A. Luntovskyy. – Cham : Springer, 2022. – С. 45–58.
4. Li J. et al. DOA estimation for underwater wideband weak targets based on coherent signal subspace and compressed sensing // *Sensors*. – 2018. – Т. 18, № 3. – С. 902.
5. Suksiri B., Fukumoto M. An efficient framework for estimating the direction of multiple sound sources using higher-order generalized singular value decomposition // *Sensors*. – 2019. – Т. 19, № 13. – С. 2977.
6. Huang M. et al. A comprehensive review of metasurface-assisted direction-of-arrival estimation // *Nanophotonics*. – 2024. – Т. 13, № 24. – С. 4381–4396.

7. Semenکو A., Domracheva C., Zaika V. Using of Amplitude Manipulated signal to increase capacity of MIMO telecommunication system // 2016 13-ї International Conference "Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications, and Computer Science" (TCSET'2016) – February 23-26 2016. – Львів- Славськ:2016. – С. 882-884.
8. Vetterli M., Kovačević J., Goyal V. K. *Foundations of Signal Processing*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2014. – 713 p.
9. Bartlett M. S. Periodogram analysis and continuous spectra // *Biometrika*. – 1950. – Т. 37, № 1/2. – С. 1–16.
10. Grythe J., Norsonic A. S. *Beamforming algorithms-beamformers* // Technical Note, Norsonic AS, Norway. – 2015. – 20 с.
11. Asadzadeh, Abbas, et al. "A new wideband beamforming by fuzzy system for coherent signals." *Digital Signal Processing* 96 (2020): 102588. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2019.102588>
12. Yaro A. S. et al. Multiangulation position estimation performance analysis using a Bartlett's Beamforming Method // *Nigerian Journal of Technology*. – 2017. – Т. 36, № 4. – С. 1155–1161.
13. Wandale S., Ichige K. A nested array geometry with enhanced degrees of freedom and hole-free difference coarray // 2021 29th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). – 2021. – С. 176-180. DOI: [10.23919/EUSIPCO54536.2021.9616342](https://doi.org/10.23919/EUSIPCO54536.2021.9616342).
14. Knapp C. H., Carter G. C. The generalized correlation method for estimation of time delay // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. – 1976. – Т. 24, № 4. – С. 320–327.
15. Padois T., Doutres O., Sgard F. On the use of modified phase transform weighting functions for acoustic imaging with the generalized cross correlation // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2019. – Т. 145, № 3. – С. 1546–1555.
16. Grinstein, Eric, et al. "Steered response power for sound source localization: A tutorial review." *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing* 2024.1 (2024): 59. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13636-024-00377-z>
17. Adavanne S. et al. Sound event localization and detection of overlapping sources using convolutional recurrent neural networks // *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*. – 2018. – Т. 13, № 1. – С. 34–48.
18. Yalta, Nelson, Kazuhiro Nakadai, and Tetsuya Ogata. "Sound source localization using deep learning models." *Journal of Robotics and Mechatronics* 29.1 (2017): 37-48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.107959>
19. Grondin F., Glass J. SVD-PHAT: A fast sound source localization method // *ICASSP 2019-2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. – IEEE, 2019. – С. 4145–4149.
20. Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis // *Proceedings of the IEEE*. – 2005. – Т. 57, № 8. – С. 1408–1418.
21. Singh J. *An Analysis of Wideband Beamforming Techniques and Hardware Requirements for Analog and Digital Radar Architectures* : : University of California, Los Angeles, 2021. – 120 с.
22. Hong S., Wan X., Ke H. Spatial difference smoothing for coherent sources location in MIMO radar // *Signal Processing*. – 2015. – Т. 109. – С. 69–83.
23. Zhao Y. et al. New convex approaches to general MVDR robust adaptive beamforming problems // *Electronics Letters*. – 2023. – Т. 59, № 18. – № e12957. DOI: [10.1049/ell2.12957](https://doi.org/10.1049/ell2.12957)
24. Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. – 1986. – Т. 34, № 3. – С. 276–280.
25. Han S. et al. A Computationally Efficient and Virtualization-Free Two-Dimensional DOA Estimation Method for Nested Planar Array: RD-Root-MUSIC Algorithm // *Sensors*. – 2022. – Т. 22, № 14. – С. 5220. DOI: [10.3390/s22145220](https://doi.org/10.3390/s22145220)
26. Fang Y. et al. Low-Complexity MUSIC Algorithm: From Finite-Precision Perspective // *arXiv e-prints*. – 2025. – arXiv:2503.12316. – 12 с.
27. Li, Jun, et al. "DOA estimation for underwater wideband weak targets based on coherent signal subspace and compressed sensing." *Sensors* 18.3 (2018): 902. DOI: <https://doi.org/10.3390/s18030902>

28. Liu D. et al. A novel reduced-dimensional beamspace unitary ESPRIT algorithm for monostatic MIMO radar // *Digital Signal Processing*. – 2021. – Т. 113. – С. 102866. DOI: 10.1016/j.dsp.2021.102866
29. Lawal T., Ofuzim O. W. Total Least Squares Implementation of ESPRIT Algorithm for Signal Processing. – 2024.
30. Liao A. et al. 2D unitary ESPRIT based super-resolution channel estimation for millimeter-wave massive MIMO with hybrid precoding // *IEEE Access*. – 2017. – Т. 5. – С. 24747–24757.
31. Bai L. et al. A nonconvex sparse recovery method for DOA estimation based on the trimmed lasso // *Digital Signal Processing*. – 2024. – Т. 155. – С. 104628. DOI: 10.1016/j.dsp.2024.104628
32. Mozafari-Majd, Emadaldin, and Visa Koivunen. "The Adaptive τ -Lasso: Robustness and Oracle Properties." *IEEE Transactions on Signal Processing* (2025). DOI: 10.1109/TSP.2025.3563225.
33. Salama A. A., Ahmad M. O., Swamy M. N. S. Underdetermined DOA estimation using MVDR-weighted LASSO // *Sensors*. – 2016. – Т. 16, № 9. – С. 1549.
34. Amirsoleimani S., Olfat A. Wideband modal orthogonality: A New approach for broadband DOA estimation // *Signal Processing*. – 2020. – Т. 176. – С. 107696. DOI: 10.1016/j.sigpro.2020.107696.

O. Bychkov, A. Shatyрко, A. Ivanenko

COMPARATIVE ANALYSIS OF CLASSICAL DIRECTION FINDING METHODS DOA

Evaluation of DOA (Direction of Arrival) remains a fundamental problem in signal processing with applications in radar, sonar, wireless communications, and autonomous navigation. Its importance has grown even more with the widespread use of unmanned aerial vehicles (UAVs) in both civilian and military fields. At the same time, their growing accessibility introduces new risks, from espionage to airspace violation, making the task of reliable localization of UAV signal sources critically important. Although DOA algorithms were developed decades ago, they continue to evolve with new approaches and modern modifications.

This work presents a review of classical methods for estimating the direction of arrival (DOA). We examined six key approaches, which can be classified into four main groups: energy methods: Bartlett (DAS) and GCC-PHAT/SRP-PHAT; adaptive methods: MVDR/Capon; subspace methods: MUSIC and ESPRIT; and optimization methods: LASSO. For each method, an analysis was conducted regarding computational complexity, resolution (the ability to distinguish spatially close sources), and robustness to noise (effectiveness in low signal-to-noise ratio conditions). Experimental results, visualized in the form of polar directivity plots, demonstrate the key advantages and limitations of each approach in scenarios with different signal-to-noise ratios and the presence of spatially close sources. We also presented relevant modifications for each method found in the scientific literature. A unique feature of this article is the attention paid to the detailed derivation of formulas for classical DOA methods to ensure a better understanding of their principles at both the mathematical and intuitive levels. Article goal is describe the work of classical DOA methods, present their detailed mathematical derivation and analysis of key characteristics, and highlight the directions for their improvement.

Keywords: direction of signal arrival; sound; energy, adaptive, subspace methods; comparison criteria; application scenarios.

Надійшла до редакції: 08.10.2025

Прийнята до друку: 25.11.2025

Опубліковано: 27.02.2026

© 2026 Бичков О. С., Шатирко А. В., Іваненко А. Ю. Цей матеріал ліцензовано за умовами CC BY 4.0.<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>